This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

Dette er en digital kopi af en bog, der har været bevaret i generationer på bibliotekshylder, før den omhyggeligt er scannet af Google som del af et projekt, der går ud på at gøre verdens bøger tilgængelige online.

Den har overlevet længe nok til, at ophavsretten er udløbet, og til at bogen er blevet offentlig ejendom. En offentligt ejet bog er en bog, der aldrig har været underlagt copyright, eller hvor de juridiske copyrightvilkår er udløbet. Om en bog er offentlig ejendom varierer fra land til land. Bøger, der er offentlig ejendom, er vores indblik i fortiden og repræsenterer en rigdom af historie, kultur og viden, der ofte er vanskelig at opdage.

Mærker, kommentarer og andre marginalnoter, der er vises i det oprindelige bind, vises i denne fil - en påmindelse om denne bogs lange rejse fra udgiver til et bibliotek og endelig til dig.

Retningslinjer for anvendelse

Google er stolte over at indgå partnerskaber med biblioteker om at digitalisere offentligt ejede materialer og gøre dem bredt tilgængelige. Offentligt ejede bøger tilhører alle og vi er blot deres vogtere. Selvom dette arbejde er kostbart, så har vi taget skridt i retning af at forhindre misbrug fra kommerciel side, herunder placering af tekniske begrænsninger på automatiserede forespørgsler for fortsat at kunne tilvejebringe denne kilde.

Vi beder dig også om følgende:

- Anvend kun disse filer til ikke-kommercielt brug
  Vi designede Google Bogsøgning til enkeltpersoner, og vi beder dig om at bruge disse filer til personlige, ikke-kommercielle formål.
- Undlad at bruge automatiserede forespørgsler
  Undlad at sende automatiserede søgninger af nogen som helst art til Googles system. Hvis du foretager undersøgelse af maskinoversættelse, optisk tegngenkendelse eller andre områder, hvor adgangen til store mængder tekst er nyttig, bør du kontakte os. Vi opmuntrer til anvendelse af offentligt ejede materialer til disse formål, og kan måske hjælpe.
- Bevar tilegnelse
  Det Google-"vandmærke" du ser på hver fil er en vigtig måde at fortælle mennesker om dette projekt og hjælpe dem med at finde yderligere materialer ved brug af Google Bogsøgning. Lad være med at fjerne det.
- Overhold reglerne
  Uanset hvad du bruger, skal du huske, at du er ansvarlig for at sikre, at det du gør er lovligt. Antag ikke, at bare fordi vi tror, at en bog er offentlig ejendom for brugere i USA, at værket også er offentlig ejendom for brugere i andre lande. Om en bog stadig er underlagt copyright varierer fra land til land, og vi kan ikke tilbyde vejledning i, om en bestemt anvendelse af en bog er tilladt. Antag ikke at en bogs tilstedeværelse i Google Bogsøgning betyder, at den kan bruges på enhver måde overalt i verden. Erstatningspligten for krænkelse af copyright kan være ganske alvorlig.

Om Google Bogsøgning

Det er Googles mission at organisere alverdens oplysninger for at gøre dem almindeligt tilgængelige og nyttige. Google Bogsøgning hjælper læsere med at opdage alverdens bøger, samtidig med at det hjælper forfattere og udgivere med at nå nye målgrupper. Du kan søge gennem hele teksten i denne bog på internettet på `http://books.google.com`

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06273099 3

Nyt

Tidsskrift for Mathematik.

Redigeret

af

cand. mag. **P. T. Foldberg** og dr. phil. **C. Juel.**

Afdeling A.

Anden Aargang.

Kjøbenhavn.

Ludvig Jørgensens Bogtrykkeri. Amagertorv 10.

1891.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
85282
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS.
1897.

THE ASTOR LIBRARY

Indhold.

Side

N. B.
Løsninger af Opgaverne til Skolelærerindeexamina 64, 127

O. B.
Løsning af Norske Examensopgaver 81

A. S. Bang, cand. mag.
Opgaver til Løsning Nr. 88—92.

Magnus Berg, Lærer, Framnes (Norge).
Løste Opgaver Nr. 73, 96

B—x.
Opgaver til Løsning Nr. 103, 104.
Løste Opgaver Nr. 46, 52, 56, 61, 65, 95.

T. Bonnesen, stud. art.
Løste Opgaver Nr. 46, 56, 58, 104.

J. Byskov, Lærer ved Gjedved Seminarium.
Løsninger af Opgaverne til Skolelærerexamen 59
Løste Opgaver Nr. 65, 66, 73, 75—79, 81.

J. C. Carlsen, Mathematiklærer.
Opgaver til Løsning Nr. 96—98.
Løste Opgaver Nr. 26, 33, 49, 54—58, 64, 82—88, 91, 101—105.

—d—d.
Løste Opgaver Nr. 65, 75, 76, 78, 81.

P. T. Foldberg, cand. mag.
Litteratur Anmeldelse 41
— — 105
Opgaver til Løsning Nr. 65—67.

Chr. Hansen, cand. mag., Realskolebestyrer i Hjørring.
En Vægtstangs Følsomhed 1

L. F. Lautrup-Jørgensen, Vamdrup.
Løst Opgave Nr. 43.

C. Juel, dr. phil.
Om Grænseværdien for x^n 137

Chr. Krüger, Rektor, Helsingør.
Litteratur Anmeldelse 114

Otto Larsen, stud. mag.
Løste Opgaver Nr. 27, 57.

P. A. Larsen, stud. mag.
En geometrisk Sætning 113
Opgaver til Løsning Nr. 101, 102.
Løste Opgaver Nr. 56, 58, 60, 61, 64, 90, 95—99.
Adolf Lomholt, Adjunkt, Viborg.
En Bemærkning 159
Opgave til Løsning Nr. 105.
Løst Opgave Nr. 99.
M. Chr. Madsen, exam. polyt., Lærer, Svendborg.
Løste Opgaver Nr. 27, 60, 62, 63, 65, 66, 80, 87, 88.
Theodor Ney, stud. polyt., Göteborg.
Opgaver til Løsning Nr. 86, 87, 99.
Løste Opgaver Nr. 49, 54.
Novalni.
Opgave til Løsning Nr. 64.
Hermann Olsen, stud. art.
Løste Opgaver Nr. 62, 63, 65, 66, 67, 69, 70, 73, 74, 82, 85, 87, 92, 93—105.
Par.
Løste Opgaver Nr. 94—100.
Carl Petersen, Aarhus.
Løst Opgave Nr. 64.
Ludvig Petersen, Adjunkt, Horsens.
Opgaver til Løsning Nr. 60—63.
Johannes Petersen, stud. mag.
Opgaver til Løsning Nr. 72, 100.
Løst Opgave Nr. 92.
Just Povlsen, Lærer.
Opgave til Løsning Nr. 96.
J. R.
Løsninger af Opgaver ved Officersskolens Examina 24, 85
E. Schou, Gymnasiast, Sorø.
Løste Opgaver Nr. 85, 87.
O. A. Smith.
Løst Opgave Nr. 73.
F. Thaarup, Adjunkt, Sorø.
Til Spørgsmaalet: De hele Tals Opløsning i Faktorer I. 49
E. C. Valentner cand. mag.
Om Kjædebrøksudviklingen for Rødder i en Ligning af 2den Grad med rationale Koefficienter 17
Om Keglesnit 18
Litteratur Anmeldelse 110
Om Konstruktion af et Keglesnit med givet Brændpunkt og som gaar igjennem 3 givne Punkter 138
Opgaver til Løsning Nr. 68—70, 108, 109.
A. Weis, cand. polyt.
Opgave til Løsning Nr. 71.
Åsted, Adjunkt, Rønne.
Opgaver til Løsning Nr. 93—95.

Side

Opgaver til Løsning.

Nr. 60— 67 14
- 68— 85 46
- 86— 92 79
- 93—100 111
- 101—106 135
- 107—109 158

Løste Opgaver.

Nr. 26, 33, 46, 49, 52, 54—58. 6
- 27, 60, 66. 31
- 61—65, 67, 43, 57. 36
- 75—79, 81. 76
- 64, 69, 73, 80, 82—88, 90—92. 97
- 70, 74, 93—100. 129
- 101—105. 155

Danske Examensopgaver.

Almindelig Forberedelsesexamen (Januar 1891) 2
— — (Marts —) 33
— — (Juni —) 73
— — (Oktober —) 148
Afgangsexamen for studerende (Januar —) 19
— — (Juni —) 69
Adgangsprøven til Officersskolens næstældste Klasse 24
Afgangsexamen fra — yngste — 85
Søofficersskolens Overgangsprøve 67
Adgangsexamen til polyteknisk Læreanstalt 91
Skolelærerexamen 59
Extraordinær Skolelærerexamen 152
Extraordinær Skolelærerindeexamen 64
Skolelærerindeexamen 127

Norske Examensopgaver.

Examen Artium 81
Middelskoleexamen for gutter 83

Svenske Examensopgaver.

Maturitetsexamen (Vårterminen 1891) 52
— (Høstterminen —) 139

Litteratur Anmeldelser.

F. J. Brockmann: Versuch einer Methodik zur Lösung planimetrischen Konstruktionsaufgaben 41
Simeon Larsen: Logarithmetabel 44
P. Krogh Jensen: Arithmetik 44

Side

K. P. Nordlund: Lärogång vid den grundläggande undervisningen i räkning 105
L. Dahlerup: Logarithmetabel I. og II. 110
S. A. Christensen og Karl Schmidt: Arithmetik og Algebra I. . . . 114
Knud Christensen og Karl Schmidt: Elementær Plangeometri 114

Korrespondance 16, 48, 80, 112, 136, 159

Rettelser og Tilføjelser 160

En Vægtstangs Følsomhed.

(Af Chr. Hansen.)

Tyngdepunktet C for Skaalernes Vægte P er Midtpunktet af AB. Lægges nu paa Skaalen til højre en Overvægt p, da rykker C ud til D saaledes, at

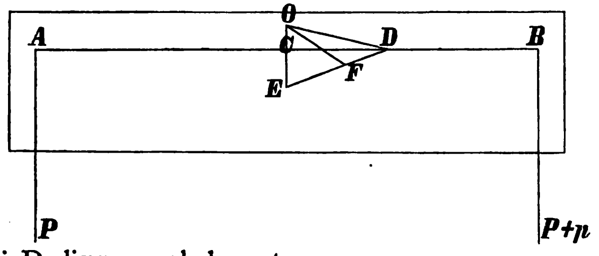
$$AD \,.\, P = BD\,(P + p)$$

eller
$$\left(\frac{AB}{2} + CD\right) P = \left(\frac{AB}{2} - CD\right) (P + p)$$

eller
$$CD\,(2P + p) = \frac{AB}{2} \,.\, p,$$

altsaa
$$CD = \frac{AB \,.\, p}{2\,(2P + p)}. \qquad (1)$$

I selve Stangens Tyngdepunkt E virker Stangens Vægt Q. Tyngdepunktet F for denne Vægt og $2P + p$, som



virker i D, ligger saaledes, at

$$\frac{EF}{DF} = \frac{2P + p}{Q}. \qquad (2)$$

$\angle$ EOF er da Udslaget, og denne Vinkel voxer, naar C eller E rykker nærmere op imod O; thi i begge Tilfælde rykker F et Stykke lodret op, hvoraf følger, at Ophængnings-

linjen og Stangens Tyngdepunkt bør ligge nær under Hvilepunktet. Men Udslaget voxer ogsaa, naar D og derved jo tillige F rykker til højre, hvilket i Følge (1) sker, naar enten AB voxer eller P aftager, saa at altsaa Stangen bør være lang og Skaalerne lette. Endelig voxer Udslaget, naar F rykker langs ED hen imod D, hvilket i Følge (2) sker, naar Q aftager, altsaa bør Stangen være let.

Danske Examensopgaver.

Almindelig Forberedelsesexamen.

Januar 1891.

Geometri.

1. Den ene Kathete i en retvinklet Trekant er $4\frac{1}{6}'$, og den anden Kathetes Projektion paa Hypotenusen er $4\frac{4}{9}'$.

Hvor stort er Trekantens Areal?

Opløsning. Lad med de i Jul. Petersens Geometri brugte Betegnelser

$$a = 4\tfrac{1}{6},\quad \beta = 4\tfrac{4}{9}.$$

Af $$a^2 = \alpha . (\alpha + \beta)$$

faas $$\alpha^2 + \tfrac{40}{9}\alpha - \tfrac{625}{36} = 0,$$

hvoraf $$\alpha = -\tfrac{20}{9} + \tfrac{85}{18} = \tfrac{5}{2}.$$

Hypotenusen $$h = 4\tfrac{4}{9} + 2\tfrac{1}{2} = 6\tfrac{17}{18},$$

Højden $$p = \sqrt{4\tfrac{4}{9} . 2\tfrac{1}{2}} = \tfrac{10}{3},$$

altsaa $$\text{Arealet} = \tfrac{1}{2}hp = \tfrac{625}{54} = 11\tfrac{31}{54}\,\Box'.$$

2. To Cirkler skære hinanden i Punkterne O og C. Gennem O tegnes en ret Linje, der skærer Cirklerne i B og D saaledes, at O ligger mellem B og D; disse to Punkter forbindes med C, og endelig tegnes der Tangenter til Cirklerne, der røre i B og D. Betegnes disse Tangenters Skæringspunkt ved A, er der dannet en Firkant ABCD; om denne skal det bevises, at den kan indskrives i en Cirkel.

Opløsning. Hjælpelinien CO trækkes, og man faar

$$\angle OCD = \angle ODA \ (= \tfrac{1}{2} \smile OD)$$
$$\angle OCB = \angle OBA \ (= \tfrac{1}{2} \smile OB),$$

følgelig $\angle BCD = \angle ODA + \angle OBA = 180^0 - \angle BAD$, hvilket er den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at Firkanten er indskrivelig i en Cirkel.

3. Konstruer en Trekant af en Vinkel og dens ene hosliggende Side, naar der tillige er givet, at den anden hosliggende Side skal være halv saa stor som den modstaaende.

Opløsning. Den givne Vinkel A og den givne hosliggende Side AB afsættes. Ud ad det andet Ben afsættes et vilkaarligt Stykke AC_1, med C_1 som Centrum og det dobbelte af C_1A som Radius tegnes en Bue, der skærer AB i B_1. En Parallel med B_1C_1 gjennem B skærer AC_1 i den søgte Trekants tredje Vinkelspids C. Thi

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AC_1}{C_1B_1} = \frac{1}{2}.$$

Arithmetik.

1. Beregn ved Logarithmer

$$x = \sqrt{\frac{1}{3}}^{\sqrt{\frac{1}{3}}}.$$

Opløsning.

$$\log x = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \frac{-\log 3}{2} = -0{,}23856 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = -z,$$

idet

$$z = 0{,}23856 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\log z = \begin{Bmatrix} \log 0{,}23856 \\ -\frac{1}{2}\log 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}37760 - 1 \\ -0{,}23856 \\ \hline 0{,}13904 - 1 \end{Bmatrix}$$

— 1,

2. Tre Tal danne en Kvotientrække; deres Logarithmer danne en Differensrække med Differensen 1 og Summen $\frac{3}{2}$. Find Tallene.

Opløsning. Tallene være x, xy og xy^2. Deres Logarithmer ere $\log x$, $\log x + \log y$ og $\log x + 2\log y$, der danne en Differensrække med Differensen $\log y$; ifølge Opgaven er da

$$\log y = 1, \quad y = 10.$$

Endvidere $$3\log x + 3\log y = \frac{3}{2}$$

$$\log x = -\frac{1}{2}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Tallene ere: $\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sqrt{10}$, $10\sqrt{10}$.

3. En Tikroneseddel byttes i Kroner, Femogtyveører og Tiører saaledes, at der ialt er 22 Mønter og dobbelt saa mange Femogtyveører som Tiører. Find Antallene.

Opløsning. Antallene kaldes x, 2y og y. Da er

$$100x + 25 \cdot 2y + 10y = 1000$$

eller $$100x + 60y = 1000$$

eller $$5x + 3y = 50$$

og $$x + 3y = 22;$$

ved Subtraktion $4x = 28$, $x = 7$, altsaa $y = 5$.

Svar: 7 Kroner, 10 Femogtyveører og 5 Tiører.

Praktisk Regning.

1. A, B og C købe i England en Skibsladning for 570 £; i Fragt betales 760 Kr. Af hele Udgiften tilligemed Tolden har A betalt Halvdelen, B Tredjedelen og C Resten. Ved Salget af Ladningen vindes 1200 Rmk. Salgssummen fordeles i Forhold til Indskuddene, og derved faar C $2033\frac{1}{3}$ Kr. Hvor meget faar A og B, og hvor mange Rmk. er der betalt Told?

$$1\ £ = 17\tfrac{7}{9}\ \text{Kr.} \quad 1\ \text{Rmk.} = \tfrac{8}{9}\ \text{Kr.}$$

Opløsning. $570\ £ = 570 \,.\, 17\tfrac{7}{9} = 10133\tfrac{1}{3}$ Kr.

$\underline{\quad 760 \quad}$ -

Indkøbspris + Fragt $= 10893\tfrac{1}{3}$ Kr.

C har betalt $\tfrac{1}{6}$ af Udgiften, erholder følgelig $\tfrac{1}{6}$ af Salgssummen; denne er altsaa 6 Gange C's Part eller 12200 Kr.

[1]) A's Part $= 6100$ Kr., B's Part $= 4066\tfrac{2}{3}$ Kr.

Differensen $122000 - 10893\tfrac{1}{3} = 1306\tfrac{2}{3}$ Kr.

$= 1306\tfrac{2}{3} \,.\, \tfrac{9}{8} = 1470$ Rmk.

udgør Told og Fortjeneste. Sidstnævnte opgivet til 1200 Rmk., følgelig [2]) Tolden $= 270$ Rmk.

2. En Korndynge har Form af et retvinklet Parallelepipedum (Volumen lig Produktet af Højde, Længde og Bredde) med Længden $= 19{,}9713$ Alen, Bredden $= 8{,}523$ Alen og Højden $= 0{,}749$ Alen. Kornet er købt for 12 Kr. 35 Øre Tønden, og ved Salget tjenes $10\tfrac{1}{2}$ p. Ct. paa Indkøbsprisen. Ved Salget havde Korndyngen den angivne Størrelse, men den var efter Indkøbet svunden 20 Tdr. Find Salgsprisen for 1 Tønde. 1 Tønde $= 4{,}2487$ Kubikfod. Logarithmer benyttes.

Opløsning. Dyngens Tøndeindhold

$$T = \frac{39{,}9426 \,.\, 17{,}046 \,.\, 1{,}498}{4{,}2487},$$

$$\log T = \begin{array}{|r} 1{,}60144 \\ +\ 1{,}23162 \\ +\ 0{,}17551 \\ \hline 3{,}00857 \\ -\ 0{,}62826 \\ \hline 2{,}38031 \end{array}$$

$$T = 240{,}056.$$

Indkøbsprisen $= (T + 20) \,.\, 12{,}35$ Kr.

Udsalgsprisen $= (T + 20) \,.\, 12{,}35 \,.\, \frac{221}{200}$ Kr.

Udsalgsprisen pr. Td. $U = \frac{(T + 20) \,.\, 12}{T \,.\, :}$

$$\log U = \begin{array}{|r} 2{,}41507 \\ +\ 1{,}09167 \\ +\ 2{,}34439 \\ \hline 5{,}85113 \\ \hline -\ 2{,}38031 \\ -\ 2{,}30103 \\ \hline 1{,}16979 \end{array}$$

$$U = 14{,}78(4) \text{ Kr.}$$

Løste Opgaver.

26. a) En Cirkelperiferi er delt i n ligestore Dele. Fra Delingspunkterne trækkes parallele Korder i en vilkaarlig Retning. Vis, at Summen af de Korder, der trækkes den ene Vej, er lig Summen af dem, der trækkes den modsatte Vej.

b) To ligestore Cirkler have Centerlinien c. Den ene Cirkel er ved n Punkter delt i n ligestore Dele. Vis, at Summen af Punkternes Potenser med Hensyn til den anden Cirkel er nc^2.

Opløsning. a) Betegnes Vinklen, som Radius til et af Delingspunkterne danner med Diametren parallel med Korderne, ved x, faas Summen af Korderne:

$$S = 2r\cos x + 2r\cos\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) + 2r\cos\left(x + 2\,.\,\frac{2\pi}{n}\right) +$$
$$\ldots + 2r\cos\left(x + (n-1)\,.\,\frac{2\pi}{n}\right);$$

multipliceres med $\sin\frac{2\pi}{n}$ og anvendes dernæst, at

$$2\cos\left(x + p\,.\,\frac{2\pi}{n}\right)\sin\frac{2\pi}{n}$$
$$= \sin\left(x + (p+1)\,.\,\frac{2\pi}{n}\right) - \sin\left(x + (p-1)\frac{2\pi}{n}\right)$$

paa hvert Led, faas

$$S \cdot \sin\frac{2\pi}{n} = r\left[-\sin\left(x-\frac{2\pi}{n}\right) - \sin x + \sin\left(x + (n-1)\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\right.$$
$$\left. + \sin\left(x + n\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\right]$$
$$= r\cdot 2\cos\left(x + \frac{n-2}{2}\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\sin\pi = 0,$$

$S = 0$. Sætningen er dermed bevist.

b) Betegnes Radierne ved r, de n Punkters Afstande fra den anden Cirkels Centrum ved $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, er Summen af Punkternes Potenser:

$$S = (a_1^2 - r^2) + (a_2^2 - r^2) + (a_3^2 - r^2) + \ldots + (a_n^2 - r^2). \quad (1)$$

Betegnes den Vinkel, som Radius til det første Delingspunkt danner med Centerlinien, ved x, faas

$$a_1^2 = r^2 + c^2 - 2rc\cos x$$

og for de andre Afstande de dermed analoge Udtryk, der indsatte i (1) giver

$$S = nc^2 - 2rc\left[\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(x + 2\cdot\frac{2\pi}{n}\right) + \right.$$
$$\left. \ldots + \cos\left(x + (n-1)\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\right],$$

der i Flg. a) er lig nc^2. (J. C. Carlsen.)

33. I Firkant ABCD, hvorom en Cirkel kan omskrives, ere BC = a og CD = b de korteste Sider. Disse forlænges, indtil de henholdsvis i G og H skære Forlængelserne af c og d. Afsættes dernæst paa BD Stykket BF = DE, idet E er Diagonalernes Skæringspunkt, og betegnes Trekant ACF ved T samt de største Radier i Trekanterne DAH, ABG, BCH, CDG henholdsvis ved r_a, r_b, r_c, r_d, da er

$$\frac{1}{ar_a} - \frac{1}{br_b} = \pm\frac{T}{abcd} = \frac{1}{cr_c} - \frac{1}{dr_d},$$

hvilket ønskes bevist.

Opløsning.

$$2\sin H = \frac{c}{r_a} = \frac{a}{} \quad 1 \quad 1$$

$$2\sin G = \qquad (1)$$

hvoraf $$\frac{1}{ar_a} - \frac{1}{br_b} = \frac{1}{cr_c} - \frac{1}{dr_d}.$$

AA' og CC' ere de vinkelrette paa BD, F er Firkantens Areal.

$$\triangle ADC = \tfrac{1}{2} bc \sin D = \tfrac{1}{2} DE (AA' + CC'),$$
$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2} ad \sin B = \tfrac{1}{2} BE (AA' + CC'), \text{ hvoraf}$$
$$\frac{DE}{BE} = \frac{bc}{ad}.$$
$$\frac{T}{F} = \frac{EF}{BD} = \pm \frac{DE - BE}{DE + BE} = \pm \frac{bc - ad}{cb + ad} \qquad (2)$$
$$F = \tfrac{1}{2}(bc + ad) \sin B \; (3) = \tfrac{1}{2}(ab + cd) \sin A \qquad (4)$$
$$= \triangle AHD - \triangle BHC = 2r_a^2 \sin H \sin A \sin D$$
$$- 2r_c^2 \sin H \sin B \sin C = 2(r_a^2 - r_c^2) \sin H \sin A \sin B \qquad (5)$$
$$= 2(r_b^2 - r_d^2) \sin H \sin A \sin B \qquad (6)$$

Af (2) og (3) $T = \pm \tfrac{1}{2}(bc - ad) \sin B$ (7)

af (4), (5) og (1) $\sin B = \dfrac{ab + cd}{4(r_a^2 - r_c^2)\sin H} = \dfrac{ab + cd}{2(cr_a - ar_c)}$ (8)

af (5), (6) og (1) $(r_a^2 - r_c^2) \sin H = (r_b^2 - r_d^2) \sin G$

$$cr_a - ar_c = dr_b - br_d = \frac{r_a}{c}(c^2 - a^2) = \frac{r_b}{d}(d^2 - b^2) \qquad (9)$$

af (7), (8) og (9) $T = \pm \dfrac{(bc - ad)(ab + cd)}{4(cr_a - ar_c)}$

$$= \pm \frac{bd(c^2 - a^2) - ac(d^2 - b^2)}{4(cr_a - ar_c)}$$
$$= \pm \left(\frac{bcd}{4r_a} - \frac{acd}{4r_b}\right) = \pm \frac{abcd}{4}\left(\frac{1}{ar_a} - \frac{1}{br_b}\right),$$
$$\pm \frac{4T}{abcd} = \frac{1}{ar_a} - \frac{1}{br_b} = \frac{1}{cr_c} - \frac{1}{dr_d}.$$

(J. C. Carlsen.)

46. Man har givet to rette Linier OR og OS samt et Punkt A paa OR. En vilkaarlig Cirkel, som rører OR i A, skærer OS i B og C; Tangenterne i B og C til denne Cirkel skære hinanden i D. At bestemme 1⁰ Stederne for Centrerne af indvendige og udvendige Berøringscirkler i Trekanten ABC; 2⁰ Stederne for Centrerne af den indskrevne og den udvendige Berøringscirkel til BC i Trekanten DBC.

Opløsning. Lad en fast Cirkel, der rører OR i A, skære OS i B_1 og C_1; man ser da umiddelbart, at

$$\angle B_1AB = \angle C_1AC,$$

følgelig er Halveringslinien til $\angle B_1AC_1$, den samme for alle Vinkler BAC og altsaa Stedet for den indskrevne Cirkel i $\triangle$ ABC og for den udvendige Berøringscirkel til Siden BC i samme Trekant. Den Linie, der halverer $\angle B_1AC_1$'s Nabovinkler bliver da det geometriske Sted for de to andre udvendige Berøringscirkler til $\triangle$ ABC. *)

Da endvidere de nævnte Halveringslinier gaa gjennem Midtpunkterne henholdsvis af $\smile$ BC og dens Explementbue, hvilke Punkter ere Centrer henholdsvis for den indskrevne Cirkel og den udvendige Berøringscirkel til Siden BC i $\triangle$ BDC, ere disse Linier ogsaa Stedet for disse Centrer.

b) (analytisk). A være Begyndelsespunkt, Tangenten X-Axe for et retvinklet Koordinatsystem. Linierne AB og AC fremstilles ved

$$(y - \alpha_1 x)(y - \alpha_2 x) = y^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)xy + \alpha_1\alpha_2 x^2 = 0.$$

Subtraheres herfra Cirklens Ligning multipliceret med $\alpha_1\alpha_2$, faas $\quad y^2(1 - \alpha_1\alpha_2) - (\alpha_1 + \alpha_2)xy + 2r\alpha_1\alpha_2 y = 0$

ɔ: $y = 0$ og $y(1 - \alpha_1\alpha_2) - (\alpha_1 + \alpha_2)x + 2r\alpha_1\alpha_2 = 0$, hvilken sidste Ligning paa en Faktor nær skal være identisk med den givne Linies:

$$y = \alpha x + q,$$

altsaa
$$\frac{1 - \alpha_1\alpha_2}{1} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha} = \frac{2r\alpha_1\alpha_2}{-q},$$

hvoraf
$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{2r\alpha}{2r - q}, \quad \alpha_1\alpha_2 = \frac{-q}{2r - q}.$$

For Radien p og Centerkoordinaterne (x, y) i $\triangle$ ABC's indskrevne Cirkel haves

$$p^2 = \frac{(y - \alpha_1 x)^2}{1 + \alpha_1^2} = \frac{(y - \alpha_2 x)^2}{1 + \alpha_2^2} = \frac{(y - \alpha x - q)^2}{1 + \alpha^2}$$

$$= \frac{x^2(\alpha_1 + \alpha_2) - 2xy}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{y^2 - \alpha_1\alpha_2 x^2}{1 - \alpha_1\alpha_2},$$

eller ved Indsættelse af Værdierne for $\alpha_1 + \alpha_2$ og $\alpha_1\alpha_2$

*) Disse Linier ere parallele med Halveringslinierne af de givne Liniers Vinkel.

$$p^2 = \frac{r\alpha x^2 - xy(2r - q)}{r\alpha} = \frac{y^2(2r - q) + qx^2}{2r},$$

der ved Elimination af r giver

$$(x^2 - p^2)\,[\alpha(x^2 - y^2) - 2xy] = 0,$$

hvor $\alpha(x^2 - y^2) - 2xy = 0$ fremstiller de under a) omtalte Halveringslinier.

(B — x.)

(Ogsaa løst af T. Bonnesen.)

49. De rette Linier, som forbinde Vinkelspidserne i en ligesidet Trekant ABC med et Punkt D, skære den omskrevne Cirkel i Punkterne A′, B′, C′. Bevis, at

$$AD \,.\, AA' + BD \,.\, BB' + CD \,.\, CC' = 2\,AB^2.$$

Opløsning. Centrum være O, Radius = r, OD = a; A, B og C projiceres paa OD i A″, B″ og C″. Man har da (Linierne regnede med Fortegn) i alle Tilfælde

$$AD \,.\, AA' = AD^2 + AD \,.\, DA'$$
$$= r^2 + a^2 \pm 2a \,.\, OA'' + r^2 - a^2 = 2r^2 \pm 2a \,.\, OA'',$$

og analogt

$$BD \,.\, BB' = 2r^2 \pm 2a \,.\, OB'',$$
$$CD \,.\, CC' = 2r^2 \pm 2a \,.\, OC'',$$

altsaa

$$AD \,.\, AA' + BD \,.\, BB' + CD \,.\, CC'$$
$$= 6r^2 \pm 2a(OA'' + OB'' + OC'')$$
$$= 6r^2 = 2(r\sqrt{3})^2 = 2\,AB^2,$$

idet $OA'' + OB'' + OC''$ er lig Nul (se 26 a).

(J. C. Carlsen.)

(Ogsaa løst af Theodor Ney.)

52. Søg Stedet for de Punkter, hvorfra man ser de modstaaende Sider i et Rektangel under Vinkler, der ere lige store eller Supplementvinkler.

Opløsning. Tages den ene Side i Rektanglet til X-Axe og dens Midtpunkt til Origo, ere Rektanglets 4 Vinkelspidser (a, o), (— a, o), (— a, b) og (a, b). Koordinaterne (x, y) til et Punkt, hvorfra de to modstaaende Sider ses under ligestore eller supplementære Vinkler, maa tilfredsstille Ligningerne

$$\frac{\dfrac{y}{x-a} - \dfrac{y}{x+a}}{1 + \dfrac{y^2}{x^2 - a^2}} = \pm \frac{\dfrac{y-b}{x-a} - \dfrac{y-b}{x+a}}{1 + \dfrac{(y-b)^2}{x^2 - a^2}}$$

af hvilke den ene reduceres til

$$(x^2 - a^2 + y^2 - yb)(2y - b) = 0,$$

der deler sig i den rette Linie $y = \frac{b}{2}$

og den omskrevne Cirkel $x^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{b^2}{4}$.

Den anden Ligning giver $x^2 - y^2 + by = a^2$

eller $$x^2 - \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{b^2}{4},$$

en ligesidet Hyperbel, der gaar gjennem Rektanglets Vinkelspidser. Det ses let, for hvilke Dele af de paagældende Kurver Vinklerne blive ligestore og for hvilke Dele de blive Supplementer.

(B — x.)

54. Følgende Udtryk gjøres logarithmisk bekvemt:

$$b\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\right) + c\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \frac{C}{2}\right),$$

A, B, C ere Vinkler i en Trekant; a, b og c de modstaaende Sider.

Opløsning. Af en Figur ses let, at $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{s - a}$, og de dermed analoge, altsaa

$$b\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\right) + c\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)$$

$$= br\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b}\right) + cr\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-c}\right)$$

$$= \frac{abcr}{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \frac{abc}{T} = 4R = \frac{2a}{\sin A}.$$

(J. C. Carlsen.)

(Ogsaa løst af Theodor Ney.)

55. Paa en Vædske med Vægtfylden f svømmer et Legeme og har $\frac{1}{m}$ af sit Rumfang over Vædsken. En paa-Vædske, der helt dækker over Legemet, bringer dette

til at have $\frac{1}{n}$ af sit Rumfang over den første Vædske. Find den paaheldte Vædskes Vægtfylde.

Opløsning. Idet Legemets Vægtfylde er f_1 og den paaheldte Vædskes f_2, haves

$$(n-1)f+f_2=n.f_1=n.\frac{m-1}{m}.f,$$

$$f_2=\frac{m-n}{m}.f.$$

(J. C. Carlsen.)

56. Forbindelseslinierne mellem Vinkelspidserne ABC i en Trekant og et vilkaarligt Punkt i dennes Plan skære de modstaaende Sider i $A_1B_1C_1$. Lad A_1C_1 og B_1C_1 skære henholdsvis BB_1 og AA_1 i B_2 og A_2. Det skal bevises, at Linierne AB_2 og BA_2 skære hinanden paa Linien CC_1.

Opløsning. Lad os antage, at AB_2 skærer CC_1 i M, og at BA_2 skærer den i N. I Følge den bekendte Sætning om den fuldstændige Firkant, at Diagonalerne dele hverandre harmonisk, har man nu, at Punktparrene A, O og A_1, A_2 ere harmonisk forbundne; Linierne BA, BO og BA_1, BA_2 danne altsaa et harmonisk Straalebundt, hvoraf følger, at N er harmonisk forbundet med C med Hensyn til C_1 og O. Ligeledes faas ved Betragtning af det harmoniske Straalebundt $A(BOB_1B_2)$, at M er harmonisk forbundet med C med Hensyn til C_1 og O. M og N maa da falde sammen.

(P. A. Larsen.)

(Ogsaa løst af J. C. Carlsen, T. Bonnesen samt ad analytisk Vej af B — x.)

57. Et Multiplum af 63 skrives i Ottetalsystemet med fem Cifre saaledes beskafne, at Forholdet mellem Summerne af de to sidste og de to første er 3 større end det mellemste. Bestem Tallet.

Opløsning. Cifrene være x, y, z, u, v. Man har da

$$x+8y+8^2z+8^3u+8^4v\equiv x+8y+z+8u+v\equiv 0 \pmod{63},$$

og da ingen af Cifrene kan være større end 7, er

$$(x+z+v)+8(y+u)=\begin{cases}63\\126\end{cases},$$

hvoraf

$$x + z + v = \begin{cases} 7 \\ 15 \\ 14 \end{cases}, \quad y + u = \begin{cases} 7 \\ 6. \\ 14 \end{cases} \qquad \text{(a)}$$

Desuden er

$$\frac{x+y}{u+v} = z + 3, \text{ som i Forbindelse med}$$

den første (a) giver

$$x + y = (z + 3)(u + v) = 14 - z - (u + v)$$

$$u + v = \frac{14 - z}{z + 4};$$

da $u + v$ skal være hel og $z < 8$, faas heraf

$$z = \begin{cases} 2 \\ 5 \end{cases}, \quad u + v = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}, \quad x + y = \begin{cases} 10 \\ 8 \end{cases}, \text{ desuden er } y + u = 7;$$

heraf faas nu

$$z = \begin{cases} 2 \\ 2, \\ 5 \end{cases} \quad u = \begin{cases} 0 \\ 1, \\ 0 \end{cases} \quad v = \begin{cases} 2 \\ 1, \\ 1 \end{cases} \quad y = \begin{cases} 7 \\ 6, \\ 7 \end{cases} \quad x = \begin{cases} 3 \\ 4. \\ 1 \end{cases}$$

Tallet i Ottetalsystemet: 20273, 11264, 10571,
i Titalsystemet: 8379, 4788, 4473.

De to andre Ligninger (a) ville, behandlede paa samme Maade føre til Absurditeter.

(J. C. Carlsen.)

58. a) Bestem Summen af de Vinkler, hvis tgg. ere Rødderne i Ligningen:

$$x^{10} - 3x^9 + 7x^8 - x^7 + 3x^6 - 4x^5 + 11x^4 + 2x^3 + 6x^2 - x + 1 = 0.$$

b) Løs samme Opgave med Hensyn til den almindelige Ligning af n^{te} Grad i x.

Opløsning. Vinklerne være $v_1, v_2, v_3, \ldots$, og $S_{n,p}$ betegne Summen af Produkterne af p og p af de n Størrelser $\operatorname{tg} v_1, \operatorname{tg} v_2, \operatorname{tg} v_3, \ldots \operatorname{tg} v_n$. Man har da

$$\operatorname{tg}(v_1 + v_2) = \frac{\operatorname{tg} v_1 + \operatorname{tg} v_2}{1 - \operatorname{tg} v_1 \operatorname{tg} v_2} = \frac{S_{2,1}}{1 - S_{2,2}},$$

$$\operatorname{tg}(v_1 + v_2 + v_3) = \frac{\operatorname{tg} v_1 + \operatorname{tg} v_2 + \operatorname{tg} v_3 - \operatorname{tg} v_1 . \operatorname{tg} v_2 . \operatorname{tg} v_3}{1 - (\operatorname{tg} v_1 . \operatorname{tg} v_2 + \text{tg} \cdot [illegible] \operatorname{tg} v_2 . \operatorname{tg} v_3)}$$

$$= \frac{S_{3,1} - [illegible]}{1 - [illegible]}$$

$$\operatorname{tg}(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = \frac{S_{4,1} - S_{4,3}}{1 - S_{4,2} + S_{4,4}},$$

og slutter heraf, at man almindeligt maa have

$$\operatorname{tg}(v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n) = \frac{S_{n,1} - S_{n,3} + S_{n,5} - S_{n,7} + \ldots}{1 - S_{n,2} + S_{n,4} - S_{n,6} + \ldots}$$

Rigtigheden heraf bevises paa sædvanlig Maade ved Induktion, idet man benytter, at

$$S_{n,p} = S_{n-1,p} + S_{n-1,\,p-1} \,.\, \operatorname{tg} v_n,$$

og sætter $v_n + v_{n+1}$ i Stedet for v_n.

Man har nu

a) $$\operatorname{tg}(v_1 + v_2 + \ldots + v_{10}) = \frac{3 - 1 + 4 + 2 + 1}{1 - 7 + 3 - 11 + 6 - 1} = -1,$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_{10} = p\pi - \frac{\pi}{4}.$$

b) $$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = \operatorname{arc\,tg} \frac{-a_1 + a_3 - a_5 + a_7 - \ldots}{1 - a_2 + a_4 - a_6 + \ldots}.$$

(J. C. Carlsen.)

(Ogsaa løst af P. A. Larsen og T. Bonnesen.)

Opgaver til Løsning.

60. Fra et bevægeligt Punkt paa en Kurve trækkes Tangenter til en Cirkel; find det geometriske Sted for Røringskordens Midtpunkt.

61. Konstruer en ligebenet Trekant ABC, naar man kjender Højden, et Stykke AD af Grundlinien AC og Vinklen DBC.

62. Et Legeme P sættes i Bevægelse opad en Skraaplan med Heldningsvinklen α, Gnidningskoefficienten er n. Hvor stor en Kraft maa der virke parallel med Skraaplanen, naar Legemet skal bevæge sig med jævn Hastighed? Hvor stor

skal Heldningsvinklen være, naar Kraften skal være lig Legemets Vægt? Ved hvilken Heldningsvinkel faar Kraften sin største Værdi?

63. To Kugler (Vægt P, Radius R) røre hinanden og ligge paa en vandret Plan, Gnidningskoefficienten ved Planen er n; en mindre Kugle (Vægt p, Radius r) ligger paa de to Kugler, ved Kuglerne indbyrdes er der ingen Gnidningsmodstand. Hvor stor maa n være, naar Kuglerne skulle blive liggende?

(Opgaverne 60—63 af cand. mag. Ludv. Petersen.)

64. Et femcifret Tal har Cifrene x, y, z, a og b fra venstre til højre. Ved Division af Tallet med 9 faas Resten 7, med 125 Resten 92. Desuden er

$$z^2 - x^2 = \tfrac{3}{2}(a + 3b).$$

Find Tallet. (Novalni.)

65. To Cirkler skære hinanden orthogonalt (ɔ: Tangenterne i Skæringspunktet S ere vinkelrette paa hinanden) og skære Centerlinien i Punkterne A, B, C og D. Bevis, at to af Linierne SA, SB, SC og SD halvere Vinklerne mellem de to andre. (P. T. F.)

66. Konstruer en Trekant ABC, naar der er givet $\angle$ B, $\frac{BA}{BC}$ og Beliggenheden af den indskrevne Cirkels Røringspunkter med BA og BC. (Samme.)

67. En Familiefader indsætter for hvert af sine Børn 500 Kr. aarlig i et Pengeinstitut, der giver 4 % p. a., saaledes at Summen første Gang indsættes 1ste Januar i det Aar, der følger efter Fødselsaaret og derefter hver 1ste Januar. Af Familiens 3 Børn har det første Fødselsaaret 1892, Forskellen mellem de to andres Fødselsaar er 5. Disse bestemmes, naar det er opgivet, at den inds[illegible] er voxet til c. 35620 Kr. [illegible]me.)

Korrespondance.

Spørgsmaal. I Poggendorff's »Geschichte der Physik« fortælles om Galilei's Elev Vincenzo Viviani, at han en Gang stillede følgende Opgave, som her gjengives ordret efter Poggendorff:

> »Es habe im alten Griechenland einen der Geometri geheiligten Tempel gegeben, der sei mit einem halbkugelförmigen Dom überwölbt gewesen, und in diesem Dome haben sich vier Fenster mit solcher Kunst ausgeschnitten befunden, dass der Rest der Oberfläche genau quadrirbar gewesen sei.«

Poggendorff fortæller, at Opgaven, foruden af Viviani, blev løst af forskjellige, hvoriblandt Leibnitz. Dog skal Vivianis egen Løsning have været den smukkeste.

Der spørges, hvorledes Opgaven blev løst, eller ialt Fald kan løses?

C. J. Busk.

Svar. Viviani offentliggjorde sin Løsning: »Dersom man i Halvcirklen ABD, gaaende gjennem Toppunktet B af Hvælvingen og Centret i dens Grundflade, beskriver to andre Halvcirkler over Radierne AF, FD og tager disse til Grundflader for to rette Halvcylindre, som gennemtrænge Halvkuglen fra den ene Side til den anden, ville disse afskære fire Dele, saaledes at det tiloversblevne nøjagtigt er to Gange Radiens Kvadrat« — i et i Firenze 1692 udgivet lille Skrift, men uden at meddele Beviserne. Disse offentliggjordes senere af Munken Guido Grandus under Titel: »Geometrica demonstratio Vivianeorum problematum« (Florentiæ MDCIC). Dette Værk findes paa Universitetsbibliotheket i Kjøbenhavn, men det vil være alt for vidtløftigt at referere Indholdet her. Beviserne støtte sig til ganske elementære stereometriske Sætninger, men Udviklingen er meget langvarig.

Ved Integralregningens Hjælp bevises Theoremet meget let; dette Bevis egner sig naturligvis ikke til Fremstilling i denne Afdeling af Tidsskriftet — forøvrigt heller ikke i Afd. B, da det findes i de fleste Lærebøger i analytisk Rumgeometri. Derimod vil Dr. Juel i næste Nr. af Afd. B meddele et synthetisk Bevis derfor.

Om Kædebrøksudviklingen for Rødder i en Ligning af 2den Grad med rationale Koefficienter.

(Af E. C. Valentiner.)

Det bliver i Lærebøgerne, ialtfald ved Exempler, vist, at en periodisk Kædebrøk er (irrational) Rod i en Ligning af 2den Grad med rationale Koefficienter; den omvendte Sætning, der ogsaa er gyldig, findes derimod vistnok ikke bevist i nogen dansk Lærebog med Undtagelse af Ramus's »Algebra og Functionslære«; da denne Bog imidlertid næppe er i manges Hænder og Beviset dér desuden er noget vidtløftigt, skal her gives et simpelt Bevis.

En irrational (positiv) Rod i en Ligning af den omtalte Art har Formen $x = m \pm \sqrt{N}$, hvor m og N ere rationale Tal; udvikles x i Kædebrøk og betegnes Konvergenterne og de fuldstændige Kvotienter paa sædvanlig Maade, saa er

$$x = \frac{x_r y_{r-1} + y_{r-2}}{x_r z_{r-1} + z_{r-2}},$$

altsaa

$$x_r = \frac{y_{r-2} - x z_{r-2}}{z_{r-1} x - y_{r-1}}.$$

Hvis man nu skaffer x_r rational Nævner, saa faar man

$$x_r = \frac{(y_{r-2} - x z_{r-2}) [y_{r-1} - (x \mp 2\sqrt{N}) z_{r-1}]}{-(y_{r-1} - x z_{r-1}) [y_{r-1} - (x \mp 2\sqrt{N}) z_{r-1}]}$$

$$= \frac{z_{r-2} z_{r-1} \left(\frac{y_{r-2}}{z_{r-2}} - x\right) \left(\frac{y_{r-1}}{z_{r-1}} - x \pm 2\sqrt{N}\right)}{z^2_{r-1} \left(x - \frac{y_{r-1}}{z_{r-1}}\right) \left(\frac{y_{r-1}}{z_{r-1}} - x \pm 2\sqrt{N}\right)},$$

de sidste Faktorer i Tæller og Nævner ere endelige (nærme sig til $\pm 2\sqrt{N}$); de øvrige Faktorers Produkt er begge Steder numerisk mindre end 1, eftersom $\frac{y_{r-2}}{z_{r-2}} - x$ er numerisk mindre end $\frac{1}{z_{r-2} z_{r-1}}$ og $x - \frac{y_{r-1}}{z_{r-1}}$ numerisk mindre end $\frac{1}{z^2_{r-1}}$; altsaa er baade Tæller og Nævner endelig; Nævneren er tillige rational og i Tælleren er det irrationale Led $\pm (y_{r-1} z_{r-2}$

$- y_{r-2} z_{r-1}) \sqrt{N} = \pm (-1)^r \sqrt{N}$ altsaa endeligt, følgelig maa det rationale Led ogsaa være det. Den fuldstændige Kvotient er nu bragt paa Formen $\frac{a \pm \sqrt{N}}{b}$, hvor a og b ere rationale og endelige, mindre end et vist Tal R; multiplicerer man nu med Generalnævneren G for m^2 og N i Tæller og Nævner, saa bliver $x_r = \frac{A \pm G \sqrt{N}}{B}$, hvor A og B ere hele Tal og mindre end RG; altsaa kan der kun gives et endeligt Antal fuldstændige Kvotienter og følgelig er Brøken periodisk.

(Man vil ogsaa af det foregaaende kunne udlede en højere Grændse for Antallet af Kvotienter i Perioden, nemlig $2\,G^2 N$.)

Om Keglesnit.

(Af E. C. Valentiner.)

Man viser, at et Snit i en Kegle, hvis Ledelinie er et Keglesnit, igjen er et »Keglesnit« (Cirkel, Ellipse, Parabel eller Hyperbel), ved at vise, at de retvinklede Koordinater x, y til et Punkt i en Plan og de retvinklede Koordinater ξ, η til Punktets Centralprojektion paa en anden Plan ere forbundne ved Ligninger af Formen: $\xi = \frac{a}{n}$, $\eta = \frac{b}{n}$, hvor a, b og n ere lineære med Hensyn til x og y; det kan ske paa følgende simple Maade:

»Igjennem Projektionscentret O lægges en Plan vinkelret paa Skæringslinien X for de to Planer, der skulle projiceres paa hinanden; denne Plan skærer X i et Punkt P og de to givne Planer i Linierne L og M. X tages i begge Planer til Abscisseaxe, L og M til Ordinataxer; endvidere sættes PO = p, Vinklen fra PO til L lig v, fra PO til M lig u. Skærer nu en Linie fra O Planerne i A og B og fældes fra A den vinkel-

rette Aa paa L, fra B den vinkelrette Bb paa M, saa er aA $= x$, Pa $= y$, bB $= \xi$, Pb $= \eta$, og man har da $\frac{x}{Oa} = \frac{\xi}{Ob}$; men Oa og Ob forholde sig som $y \sin v$ og $\eta \sin u$, altsaa er

$$\frac{x}{y \sin v} = \frac{\xi}{\eta \sin u};$$

desuden faar man ved at opfatte Arealet af $\triangle$ aPb som Differens mellem $\triangle$ OPb og $\triangle$ OPa, at

$$y \eta \sin (u - v) = p (\eta \sin u - y \sin v),$$

altsaa er

$$\eta = \frac{p y \sin v}{p \sin u - y \sin (u - v)}, \quad \xi = \frac{p x \sin u}{p \sin u - y \sin (u - v)}.$$

Danske Examensopgaver.

Afgangsexamen for studerende.

(Januar 1891.)

Arithmetik.

1. Hvilke positive Tal mindre end 10^4 give ved Division med 19, 29 og 43 henholdsvis Resterne 16, 1 og 11?

Opløsning. $T = 19x + 16 = 29y + 1 = 43z + 11.$

$$19x - 29y = -15$$

giver $\quad x = 16 + 29p, \quad y = 11 + 19p,$

altsaa $\quad T = 320 + 551p$

og $\quad z = \frac{309 + 551p}{43} = 7 + 13p + \frac{8 - 8p}{43},$

altsaa $\quad p = 1 + 43m,$

der indsat giver $\quad T = 871 + 551 \cdot 43m,$

hvor kun $\quad m = 0$ giver $T < 10^4$.

2. Idet α, β, γ betegne Rødderne i Ligningen

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

og m er et givet Tal, beregnes Værdien af

$$(m - \alpha^2)(m - \beta^2)(m - \gamma^2).$$

Opløsning. Den Ligning, hvis Rødder ere α^2, β^2 og γ^2 faas ved at sætte $x^2 = y$, $x = y^{\frac{1}{2}}$:

$$y \cdot y^{\frac{1}{2}} + ay + by^{\frac{1}{2}} + c = 0,$$

der rationaliseres og ordnes til

$$y^3 + (2b - a^2)\,y^2 + (b^2 - 2ac)\,y - c^2 = 0.$$

Da Polynomiet paa venstre Side er identisk med

$$(y - \alpha^2)\,(y - \beta^2)\,(y - \gamma^2),$$

bliver det søgte Udtryk

$$m^3 + (2b - a^2)\,m^2 + (b^2 - 2ac)\,m - c^2.$$

3. Paa hvormange Maader kunne n forskellige Elementer deles i 2 Grupper?

(En Gruppe skal have mindst 1 Element, og en Gruppes Elementer tænkes ikke ordnede.)

Opløsning. Det søgte Antal indses umiddelbart at være

$$N = \tfrac{1}{2}\,(K_{n,1} + K_{n,2} + K_{n,3} + \ldots + K_{n,n-1}),$$

idet $K_{n,p}$ betyder Antallet af Kombinationer af n Elementer til p.

Da $(1 + 1)^n = 1 + K_{n,1} + K_{n,2} + \ldots + K_{n,n-1} + K_{n,n}$,

bliver $$N = \tfrac{1}{2}\,(2^n - 2) = 2^{n-1} - 1.$$

Geometri.

1. Et regulært Tetraeder er indskrevet i en Kugle med Radius r. En anden Kugle har sit Centrum i Tetraedrets ene Hjørnespids og gaar gennem de tre andre. Find Volumen og Overflade af det Legeme, der begrænses af de to Kugleflader.

Opløsning. Kaldes Tetraedrets Kant a, dets Højde H,

er $$H = a\sqrt{\tfrac{2}{3}}, \quad r = \frac{3}{4}H = \frac{3}{4}a\sqrt{\tfrac{2}{3}},$$

altsaa $$a = \frac{2r\sqrt{6}}{3}.$$

Det søgte Volumen V er Differens mellem to Kugleafsnit

A og A_1 med Radierne r og a, Højderne $h = \frac{2}{3} r$ og $h_1 = a - H = \frac{2r}{3}(\sqrt{6} - 2)$.

$$A = \pi h^2 (r - \tfrac{1}{3} h) = \frac{28}{81} \pi r^3.$$

$$A_1 = \pi h_1^2 (a - \tfrac{1}{3} h_1) = \frac{32}{81} \pi r^3 . (3\sqrt{6} - 7)$$

hvoraf
$$V = \frac{4}{27} \pi r^3 (21 - 8\sqrt{6}).$$

Overfladen O er Summen af to Kalotter K og K_1, af hvilke

$$K = 2\pi r h = \frac{4}{3} \pi r^2$$

og
$$K_1 = 2\pi a h_1 = \frac{16}{9} \pi r^2 (3 - \sqrt{6})$$

altsaa
$$O = K + K_1 = \frac{4}{9} \pi r^2 (15 - 4\sqrt{6}).$$

De to Kuglefläder begrænse flere andre Legemer; disse beregnes let ved Hjælp af det her fundne.

2. Vis, at der i Almindelighed kan trækkes tre Normaler fra et Punkt (a, b) til en Parabel ($y^2 = px$) og beregn Koordinaterne til Medianernes Skæringspunkt i den Trekant, hvis Vinkelspidser ere Normalernes Endepunkter.

Opløsning. Har Normalens Endepunkt (i Parablen) Koordinaterne (x, y), det løbende Punkt Koordinaterne (X, Y), vil Ligningen være

$$Y - y = -\frac{2y}{p}(X - x),$$

der skal tilfredsstilles af $X = a$, $Y = b$, saa at Endepunktets Koordinater bestemmes af Ligningerne

$$b - y = -\frac{2y}{p}(a - x) \qquad (1)$$

og
$$y^2 = px \qquad (2)$$

Ved Elimination

der giver tre Værdier af y (y_1, y_2, y_3), hvorefter de tilsvarende Værdier af x findes af (2) $\left(\frac{y_1^2}{p}, \frac{y_2^2}{p}, \frac{y_3^2}{p}\right)$.

De søgte Koordinater blive

$$\xi = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{3p}$$

$$= \frac{(y_1 + y_2 + y_3)^2 - 2(y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1)}{3p}$$

$$= \frac{2ap - p^2}{3p} = \frac{2a - p}{3}.$$

$$\eta = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = 0,$$

saa at Punktet er beliggende i Abscisseaxen.

3. Konstruer en Trekant ABC, idet Højden og Vinklens Halveringslinie fra A (h_a og v_A) ere givne tilligemed Forskellen mellem de Stykker, i hvilke Højden deler Siden a.

Opløsning. Vinklen mellem v_A og a er lig $\frac{A}{2} + C = 90^0 - \frac{B}{2} - \frac{C}{2} + C = 90^0 - \frac{B-C}{2}$. Ved at tegne den af h_a og v_A i Forbindelse med en Del af a dannede retvinklede Trekant faas B — C da lig det dobbelte af Vinklen mellem h_a og v_A. Tænkes nu den søgte Trekant lagt om, saaledes at B falder i C og C i B, A i A_1, vil i Trekant AA_1C følgende Stykker være bekendte: AA_1 = Forskellen mellem de Stykker, hvori a deles af h_a, $\angle ACA_1 = B - C$, Højden fra C paa AA_1 lig h_a. Denne Trekant kan da konstrueres, og derefter bestemmes let Punktet B.

Beregningsopgave.

I en Trekant med Siderne a, b, c ere disse delte henholdsvis i Stykkerne a_1 og a_2, b_1 og b_2, c_1 og c_2 (i den angivne Orden, naar man gaar rundt om Trekanten) og Delingspunkterne forbundne. Beregn Vinklerne i den lille Trekant, naar $a = 17{,}1$; $b = 17{,}5$; $c = 17{,}9$; $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{23}{27}$.

Opløsning. Først beregnes Vinklerne i den store Trekant. Med de sædvanlige Betegnelser er

$$s = 26{,}25 \qquad \log s = 1{,}41913$$
$$s - a = 9{,}15 \qquad \log(s-a) = 0{,}96142$$
$$s - b = 8{,}75 \qquad \log(s-b) = 0{,}94201$$
$$s - c = 8{,}35 \qquad \log(s-c) = 0{,}92169.$$

$$\log tg\frac{A}{2} = 9{,}74158 - 10 \text{ (forhøjet)}$$

$$\log tg\frac{B}{2} = 9{,}76099 - 10 \quad \text{—}$$

$$\log tg\frac{C}{2} = 9{,}78131 - 10 \quad \text{—}$$

$$\frac{A}{2} = 28^0\,52'\,43'', \quad \frac{B}{2} = 29^0\,58'\,26'',$$

$\frac{C}{2} = 31^0\,8'\,51''$, idet der er taget Hensyn til Forhøjelserne.

Delingspunkterne paa Siderne kaldes A_1 (paa BC), B_1 (paa CA) og C_1. Vinklerne i Trekanterne A_1CB_1 o. s. v. beregnes. Man sætter $\angle CA_1B_1 = m$, $\angle CB_1A_1 = p$ o. s. v. rundt q, r, s, t.

Først findes $a_1 = 7{,}866;\ a_2 = 9{,}234$
$b_1 = 8{,}05;\ b_2 = 9{,}45$
$c_1 = 8{,}234;\ c_2 = 9{,}666.$

Da er $$tg\frac{p-m}{2} = \frac{1{,}184}{17{,}284}\cot\frac{C}{2},$$

$$\log tg\frac{p-m}{2} = 9{,}05440 - 10,$$

$$\frac{p-m}{2} = 6^0\,28', \quad \frac{p+m}{2} = 58^0\,51'\,9''$$

$$p = 65^0\,19'\,9'', \quad m = 52^0\,23'\,9''.$$

$$tg\frac{r-q}{2} = \frac{1{,}216}{17{,}684}\cot\frac{A}{2}$$

$$\log tg\frac{r-q}{2} = 9{,}09577 - 10$$

$$\frac{r-q}{2} = 7^0\,6'\,23'', \quad \frac{r+q}{2} = 61^0\,7'\,17''$$

$$r = 68^0\,13'\,40'', \quad q = 54^0$$

$$\operatorname{tg} \frac{t-s}{2} = \frac{1,8}{17,532} \cot \frac{B}{2}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{t-s}{2} = 9,25045$$

$$\frac{t-s}{2} = 10^0\,5'\,37'', \quad \frac{t+s}{2} = 60^0\,1'\,34''$$

$$t = 70^0\,7'\,11'', \quad s = 49^0\,55'\,57''$$

$$\angle A_1 = 180^0 - (t+m) = 57^0\,29'\,40''$$

$$\angle B_1 = 180^0 - (p+q) = 60^0\,39'\,57''$$

$$\angle C_1 = 180^0 - (r+s) = 61^0\,50'\,23''$$

Projektionstegning.

Tegn Projektionerne af en Kugle med et indskrevet, regulært Tetraeder, der ikke indtager nogen simpel Stilling i Forhold til Projektionsplanerne. Tillige tegnes Projektionerne af en af de sfæriske Trekanter, hvis Vinkelspidser ere tre af Tetraedrets Hjørnespidser. Kuglen tænkes gennemsigtig.

Adgangsprøven til Officersskolens næstældste Klasse.

(Marts 1891.)

1ste Opgave i Mathematik. — Almindelig Prøve.

1. Af en retvinklet Trekant kjender man Katheternes Sum a, Summen b af Hypotenusen og Højden paa Hypotenusen. Man skal finde Hypotenusen, Højden og Katheterne. Hvad hører der til for at Opgaven kan være mulig? Imellem hvilke Grændser maa b ligge for at dette skal finde Sted?

2. Givet $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = n$ og $\frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'} = p$. — Vis at $\frac{a \pm a'}{b \pm b'}$ er lig med $\frac{c \pm c'}{d \pm d'}$ (de øverste Tegn høre sammen), naar enten $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ eller $\frac{b}{b'} = \frac{d}{d'}$.

Opløsning. 1. Hypotenusen kaldes h, Højden p, Katheterne k og l. Givet $k + l = a$ (1), $h + p = b$. (2)

Endvidere er $hp = kl$ (3) og $h^2 = k^2 + l^2$ (4).

Kvadreres (1) $k^2 + l^2 + 2kl = a^2$

og benyttes (3) og (4), faas

$$h^2 + 2hp = a^2,$$

der sammen med (2) giver

$$p = \sqrt{b^2 - a^2}, \quad h = b - \sqrt{b^2 - a^2}.$$

Heraf ser man, at $b > a$.

Af $k + l = a$, $kl = b\sqrt{b^2 - a^2} - (b^2 - a^2)$

faas $$\left.\begin{matrix} k \\ l \end{matrix}\right\} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{b^2 - \frac{3a^2}{4} - b\sqrt{b^2 - a^2}},$$

der fordrer $$b^2 - \frac{3a^2}{4} \geqq b\sqrt{b^2 - a^2}$$

$$b \leqq a\sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$

2. $$\frac{a \pm a'}{b \pm b'} = \frac{c \pm c'}{d \pm d'},$$

hvis $ad \pm ad' \pm a'd \pm a'd' = bc \pm bc' \pm b'c \pm b'c'$.

Da $ad = bc$ og $a'd' = b'c'$,

skal $ad' + a'd = bc' + b'c$.

Nu er $a = nb$, $a' = pb'$, $c' = pd'$, $c = nd$,

altsaa skal $nbd' + pb'd = pbd' + nb'd$

eller $(n - p)(bd' - b'd) = 0$,

hvilket finder Sted, enten naar $n = p$ ɔ: $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$

eller naar $bd' = b'd$ ɔ: $\frac{b}{b'} = \frac{d}{d'}$.

hv. sk. bev.

2den Opgave i Mathematik. — Almindelig Prøve.

1. Siden AB i $\triangle$ ABC er delt ved Punkterne A_1, A_2, ... A_n. — A_1A_2 = etc). Drages CA_{n-1} og parallele med CA_{n-1},

bliver Trekanten deelt i n Dele. — Find Arealerne af dem, naar $\triangle$ ABC har Arealet T.

2. To Cirkler, der tangere hinanden i A, skæres af 2 med den fælles Tangent parallele Linier, den ene i Punkterne B og i Punkterne F, den anden i Punkterne C og i Punkterne G (B og C paa samme Linie). — Vis at $\frac{AB}{AC} = \frac{AF}{AG}$. — Som Anvendelse konstrueres 4de Proportional til Linierne a, b og c.

Opløsning. 1. Delingspunkterne paa AC kaldes C_1, $C_2 \ldots C_{n-2}$.

Da er

$$\triangle AA_1C_1 = \frac{1}{n(n-1)} T,$$

$$\triangle AA_2C_2 = \frac{4}{n(n-1)} T,$$

$$\triangle AA_3C_3 = \frac{9}{n(n-1)} T,$$

. . . .

$$\triangle AA_{n-2}C_{n-2} = \frac{(n-2)^2}{n(n-1)} T,$$

$$\triangle AA_{n-1}C = \frac{(n-1)^2}{n(n-1)} T.$$

De n Dele, hvori T deles, blive da

$$\frac{1}{n(n-1)} T, \ \frac{3}{n(n-1)} T, \ \frac{5}{n(n-1)} T \ldots \frac{2n-3}{n(n-1)} T \text{ og } \frac{1}{n} T.$$

2. Centerlinien skære Parallelerne i D og E, Cirklerne i A_1 og A_2. Trækkes CA_1 og GA_1, BA_2 og FA_2, dannes retvinklede Trekanter, hvoraf ses at

$$AC^2 = AD \cdot 2r,$$

$$AB^2 = AD \cdot 2R,$$

hvoraf

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{R}{r}.$$

Endvidere

$$AG^2 = AE \cdot 2r,$$

$$AF^2 = AE \cdot 2R,$$

hvoraf $$\frac{AF^2}{AG^2} = \frac{R}{r}.$$

Altsaa er $$\frac{AB}{AC} = \frac{AF}{AG}.$$

Er AB = a, AC = b, kan man vælge B og C, bestemme A og derefter Centrerne, tegne Cirklerne, afsætte AF = c, trække FG parallel med BC. Den søgte 4de Proportional er da AG.

1ste Opgave i Mathematik. — Tillægsprøve.

1. Fra et vilkaarligt Punkt M paa en Ellipses ene Ledelinie drages Tangenter til Ellipsen. Den Vinkelrette fra M paa Berøringskorden skærer denne i N. — Find Stedet for N, naar M gjennemløber Ledelinien. Hvad bliver dette Sted, naar den givne Kurve er en Hyperbel?

2. I Tetraedret A — BCD ere de modstaaende Kanter AC (= b) og BD (= a) vinkelrette paa hinanden; deres Afstand lig h. — Vis at Snittet imellem Tetraedret og et Plan parallelt med AC og BD er et Rektangel. — Find Arealet af det kvadratiske Snit og Volumen af en af de Dele, hvori dette Snit deler Tetraedret.

Opløsning. 1. Ligningen for Røringskorden (Punktet M's Polar) er

$$\frac{x \cdot \frac{a}{e}}{a^2} \pm \frac{y\eta}{b^2} = 1 \text{ eller reduceret } \frac{x}{ae} \pm \frac{y\eta}{b^2} = 1. \quad (1)$$

Ligningen for Linien MN er

$$y - \eta = \pm \frac{a^2\eta}{b^2 \cdot \frac{a}{e}}\left(x - \frac{a}{e}\right),$$

der reduceres til $y - \eta = \pm \frac{ae\eta}{b^2}\left(x - \frac{a}{e}\right)$ (2)

e Ligninger m. H. t. η og indføres for

ningen

$$(x - ae)^2 + y^2 = 0,$$

der er Ligningen for 2 imaginære rette Linier gjennem Brændpunktet.

2. Planet antages at skjære Sidefladerne ADC og ABC efter Linierne EH og FG samt Sidefladerne ADB og CDB efter Linierne HG og EF. — Da et Plan, der er parallel med 2 Planers Kant skjærer dem efter parallele Linier, bliver $EH \neq FG \neq CA$ og $HG \neq EF \neq DB$.

Snittet EHGF er altsaa et Parallelogram; men da DB er givet at være vinkelret paa AC, er ogsaa FE vinkelret paa FG og Parallelogrammet et Rektangel.

Da DC er fælles for de to Trekanter DCB og DCA har man:

$$\frac{EF}{a} = \frac{CE}{CD} \text{ og } \frac{HE}{b} = \frac{DE}{CD} = \frac{CD - CE}{CD} = 1 - \frac{CE}{CD}, \text{ altsaa}$$

$$\frac{HE}{b} = 1 - \frac{EF}{a}.$$

Rektanglet bliver et Kvadrat med Siden x, naar $HE = EF = x$, altsaa bestemmes x ved Ligningerne

$$\frac{x}{b} = \frac{a - x}{a} = \frac{a}{a + b}, \text{ hvoraf } x = \frac{ab}{a + b}.$$

Snittet deler Tetraedret i to tagformede Prismatoider; vil man beregne Volumen af Prismatoiden EHGFBD, maa man finde Arealet af det Rektangel, der fremkommer naar Prismatoiden skjæres med en Plan, der er $\neq$ BD og EFGH og ligger midt imellem dem. — Dette Rektangels ene Side er $\frac{a(a + 2b)}{2(a + b)}$, den anden $\frac{ab}{2(a + b)}$ og Prismatoidens Højde $= \frac{\frac{ab}{a + b}h}{b}$; følgelig bliver Prismatoidens Volumen

$$\frac{ah}{6(a + b)}\left(\frac{a^2b^2}{(a + b)^2} + 0 + \frac{4 \cdot a(a + 2b)ab}{2(a + b) \cdot 2(a + b)}\right)$$

$$= \frac{ha^3b(a + 3b)}{6(a + b)^3}.$$

Volumen af den anden Del bliver $\frac{hb^3a(3a + b)}{6(a + b)^3}$.

2den Opgave i Mathematik. — Tillægsprøven.

1. Af en Trekant kjender man Siden a, Vinklen A og Summen p af de to andre Sider. — Man skal udvikle Formler til Beregning af de manglende Stykker og angive de Grændser, hvorimellem a maa ligge for at Opgaven kan være mulig. — Endelig beregnes Vinklerne, naar $p = 850$, $a = 360$ og $\angle A = 41^0\, 0'\, 5{,}1''$.

2. Normalen til Punktet M (x_1, y_1) paa Kurverne $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ skærer X-Axen i N og Y-Axen i P. — Find Forholdet imellem MN og MP.

Opløsning. 1. I Henhold til Relationerne af 1ste Art haves $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = (b + c)^2 - 4bc\cos^2\frac{A}{2}$,

hvoraf $$bc = \frac{1}{4}(p^2 - a^2)\sec^2\frac{A}{2}.$$

b og c bestemmes nu ved Ligningen

$$x^2 - px + \frac{1}{4}(p^2 - a^2)\sec^2\frac{A}{2} = 0,$$

$$\left.\begin{matrix} b \\ c \end{matrix}\right\} = x = \frac{p \pm \sqrt{a^2\sec^2\frac{A}{2} - p^2\,\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}}}{2},$$

b og c blive reelle, naar

$$a^2\sec^2\frac{A}{2} \geqq p^2\,\mathrm{tg}^2\frac{A}{2},$$

altsaa naar $$a \geqq p\sin\frac{A}{2}.$$

Trekanten bliver ligebenet, naar $a = p\sin\frac{A}{2}$.

Betingelsen for at b og c begge blive positive er at

$$p > \sqrt{a^2\sec^2\frac{A}{2} - p^2\,\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}},$$

altsaa

For at Opgaven [illegible] altsaa have

Ved Hjælp af Relationerne af 2den Art faaes

$$\cos\frac{B-C}{2} = \frac{p}{a}\sin\frac{A}{2},$$

hvoraf $\frac{B-C}{2}$ kan findes; da man endvidere kjender $\frac{B+C}{2}$ $= 90^0 - \frac{A}{2}$ finder man B ved Addition og C ved Subtraktion.

Indsættes Værdierne faaes:

$$\log\cos\frac{B-C}{2} = \log\sin 20^0\,30'\,2{,}6'' + \log 850 - \log 360$$

$$= 9{,}91746 - 10$$

$$\frac{B-C}{2} = 34^0\,13'\,0''$$

$$\frac{B+C}{2} = 69^0\,29'\,57{,}5''$$

$$B = 103^0\,42'\,57{,}5'', \quad C = 35^0\,16'\,57{,}5''.$$

[Da den ovenfor udviklede Formel til Beregning af b og c ikke er logarithmisk, vil det være simplest, hvis de skulle beregnes, at finde et Udtryk for $b - c$; ved Relation af 2den Art faas

$$b - c = \frac{a\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}},$$

$$\log(b-c) = 2{,}33470, \quad b - c = 216{,}12$$

og da

$$b + c = 850$$

faas

$$b = 533{,}06 \text{ og } c = 316{,}94.]$$

2. Normalens Ligning er

$$y - y_1 = \pm\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1).$$

Sættes heri $y = 0$ finder man, at Punktet N har Abscissen e^2x_1.

Kaldes M's Projektion paa X-Axen M_1, Centret O, er

$$\frac{MN}{MP} = \frac{M_1N}{M_1O} = \frac{-x_1 + e^2x_1}{-x_1} = 1 - e^2 = \pm\frac{b^2}{a^2}.$$

Det søgte Forhold er altsaa positivt ved Ellipsen, negativt ved Hyperblen.

(J. R.)

Løste Opgaver.

27. En Mand ejer et firkantet Stykke Jord ABCD, hvori Vinklerne A og B ere rette samt DA = 167', AB = 140' og BC = 62'. Denne Jord udstykker han ved en ret Linie EF i to Byggegrunde AEFD og EBCF saaledes, at $\frac{AE}{BE} = \frac{2}{5}$ og $\frac{CF}{FD} = \frac{3}{1}$. Af disse Byggegrunde sælger han den første til 80 Øre for hver Kvadratfod og den sidste til 1 Kr. 20 Øre dito. Hele Summen bliver ham dog ikke udbetalt strax, men med Renter beregnede til 2 Procent halvaarligt i Løbet af 10 Aar med et og samme Beløb fjerdingaarligt. Hvor stor en fjerdingaarlig Indtægt har han da i den Tid af sin Jord?

Opløsning. Hele Arealet er $\frac{140\,(167 + 62)}{2} = 16030$ □'. Hjælpelinierne CH ≠ BA og FG ≠ DA trækkes til Skæring med de modstaaende Sider. Man har da AE = 40', EB = 100', CD = 175', DF = $\frac{175'}{4}$, FC = $\frac{525'}{4}$, HD = 105', samt

$$\frac{140 - AG}{140} = \frac{FG - 62}{105} = \frac{3}{4},$$

hvoraf AG = 35', altsaa GE = 5', og FG = $\frac{563'}{4}$.

Den ene Byggegrund AEFD bestaar nu af Trapezet AGFD og den retvinklede Trekant EGF; dens Areal bliver altsaa

$$\frac{35\,(167 + \frac{563}{4})}{2} + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{563}{4} = 5737\tfrac{1}{2}\ \square',$$

og den anden Byggegrund bliver følgelig $10292\frac{1}{2}$ □'. Salgssummen er 4590 + 12351 = 16941 Kr. Til 2 pCt. halvaarlig svarer 0,995 pCt. fjerdingaarlig, og den søgte fjerdingaarlige Indtægt bliver altsaa

$$= \frac{16941 \,.\, 0{,}00995}{1 - \frac{1}{1{,}02^{20}}} = \text{c. } 515\tfrac{1}{2}\ \text{Kr.}$$

(Otto Larsen.)

(Ogsaa løst af M. Chr. Madsen.)

60. Fra et bevægeligt Punkt paa en Kurve træl
Tangenter til en Cirkel; find det geometriske Sted for Røri
kordens Midtpunkt.

Opløsning. Kaldes det bevægelige Punkt M, Cirk
Centrum O, den ene Tangents Røringspunkt T, og Røri
kordens Midtpunkt P, har man $\triangle MTO \sim \triangle TPO$,
altsaa $$OP \cdot OM = OT^2 = r^2,$$
hvoraf ses, at det geometriske Sted for P er den givne Ku
inverse Kurve, idet Cirklens Centrum og Kvadratet paa d
Radius er resp. Inversionscentrum og potens.

(P. A. Larsen.)

Det bevægelige Punkt være (m, n), Cirklen $x^2 + y^2 =$
man har da Ligningerne
$$mx + ny = r^2$$
$$y = \frac{n}{m} x,$$
hvoraf
$$m = \frac{xr^2}{x^2 + y^2}, \quad n = \frac{yr^2}{x^2 + y^2}.$$

Indsættes disse Værdier i Ligningen mellem m og n, f
Ligningen for det søgte geometriske Sted.

(M. Chr. Madsen.)

66. Konstruer en Trekant ABC, naar der er givet $\angle$
$\frac{BA}{BC}$ og Beliggenheden af den indskrevne Cirkels Rørin
punkter med BA og BC.

Opløsning. Over Røringspunkternes Forbindelsesli
beskrives det Segment, der rummer $\angle$ B. Den vinkelre
gennem Centrum paa Forbindelseslinien bestemmer B og C
trum for den indskrevne Cirkel, der da kan tegnes. Ud
BA og BC afsættes Linier, der staa i det givne Forho
Linien AC er da Tangent til den indskrevne Cirkel og paral
med Forbindelseslinien mellem Endepunkterne.

(M. Chr. Madsen.)
(Ogsaa løst af J. Byskov og Herm. Olse

Danske Examensopgaver.

Almindelig Forberedelsesexamen.

Marts 1891.

Arithmetik.

1. Bortskaf den irrationale Nævner af Brøken

$$\frac{\sqrt{24}}{2\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + \sqrt[3]{512}}.$$

Opløsning. $\sqrt[3]{512} = 8$, $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$. Ved Multiplikation af Tæller og Nævner med $8 + 2\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$ faas

$$\frac{8\sqrt{6} + 10\sqrt{3} + 6\sqrt{2}}{16\sqrt{3} + 13},$$

der ved Tællers og Nævners Multiplikation med $16\sqrt{3} - 13$ giver

$$\frac{480 + 306\sqrt{2} - 130\sqrt{3} - 8\sqrt{6}}{599}.$$

2. En Kapital paa 190007 Kr. vokser med Rente og Rentes Rente i 5 Aar til 232708 Kr. Til hvilken Sum er den vokset 2 Aar senere?

Rentefoden r bestemmes af Ligningen

$$190007 \,.\, (1 + r)^5 = 232708,$$

hvoraf

$$1 + r = \sqrt[5]{\frac{232708}{190007}},$$

$$\log(1 + r) = 0{,}01761.$$

Den søgte Sum s er da

$$s = 232708 \,.\, (1 + r)^2,$$

$$\log s = 5{,}40203,$$

$$s = 252365 \text{ Kr.}$$

3. Opløs Udtrykket

$$m^4 + b^2(a - b)^2 - m^2(a^2 - 2ab + 2b^2)$$

i Faktorer.

Opløsning. Da Udtrykket

$$m^2 = b^2 \text{ og}$$

[illegible]

[illegible] en given Linie.

[illegible] Sider faar man ved paa den [illegible] den givne Perimeter i 3 Dele, der

forholde sig som $1 : 2 : \sqrt{3}$. $\sqrt{3}$ faas enten som Mellemproportional mellem 3 og 1 eller som Kathete i en retvinklet Trekant, hvis anden Kathete er 1, Hypotenuse 2.

Regning.

1. En Turist køber hos en Vekselleror 25 £, 540 Fr. og 450 Rm.; han skal give 18 Kr. 20 Øre for 1 £ og det samme for 20 Rm. Desuden beregner Veksellereren sig $^1/_2$ p. Ct. af den hele Sum i Fortjeneste og 6 p. Ct. p. a. i Rente (simpel Rente) af udestaaende Fordringer. Naar nu Turisten 2 Maaneder senere betaler hele sin Gæld til Veksellereren med 1277 Kr. 64 Øre, hvor meget har han da givet for 1 Fr.?

Opløsning. Kaldes Prisen for 1 fr. x Øre, er

$$\left[\left(25 + \frac{45}{2}\right) . 1820 + 540x\right] . \left(1 + \frac{1}{200}\right) . \left(1 + \frac{6 . 2}{12 . 100}\right)$$
$$= 127764,$$
$$540x = \frac{127764 . 200 . 100}{201 . 101} - 86450$$
$$= \text{c. } 125870 - 86450 = 39420,$$
$$x = 73.$$

2. En Cylinder, der vejer 2157 ℔ 90 Kvint, bestaar af en Blanding af Tin og Kobber, saaledes at det sidste Metal udgjør $91^2/_3$ p. Ct. af hele Cylinderens Vægt. Hvor stor er dens Højde (h), naar Grundfladens Radius (r) er 9 Tommer?

En Cylinders Rumfang $= \pi r^2 h$. Vægtfylden af Kobber 8,9, af Tin 7,3. 1 Kubikfod Vand vejer 61,829 ℔ . $\pi = 3{,}1416$.

Opløsning. Kobberindholdets Vægt $= \frac{215790 . 11}{12}$ Kv.

Da 1728 Kubt. Kobber vejer 6182,9 . 8,9 Kv.,

vil Rumindholdet af 1 Kv. Kobber være $\frac{1728}{6182{,}9 . 8{,}9}$ Kubt.,

følgelig Rumindh. af den givne Kobbervægt

$$\frac{215790 . 11 . 1728}{12 . 6182{,}9 . 8{,}9} \text{ Kubt.}$$

$$x_2 = \frac{-(1+q) \pm \sqrt{(1+q)^2 - [(1+q)q+2(1-q)][(1+q)+2(1-q)]}}{1+q+2(1-q)}$$

eller $$x_2 = \frac{-(1+q) \pm \sqrt{(q-1)(q^2-2q+5)}}{1+q+2(1-q)}.$$

Da $q^2 - 2q + 5$ er positiv for alle reelle q, vil Rødderne x_2 blive reelle ulige store, naar $q > 1$, men saa blive Rødderne x_1 netop imaginære — og omvendt.

(L. F. Lautrup-Jørgensen.)

57. Et Multiplum af 63 skrives i Ottetalsystemet med fem Cifre saaledes beskafne, at Forholdet mellem Summerne af de to sidste og de to første er 3 større end det mellemste. Bestem Tallet.

Opløsning. Man har

$$63m = 8^4 . a + 8^3 . b + 8^2 . c + 8d + e \qquad (1)$$

og $$\frac{d+e}{a+b} = c + 3 \text{ eller } d + e = (a+b)(c+3), \qquad (2)$$

hvor intet af Tallene a, b, c, d og e er > 7. Af (1) sluttes

$$a + b + c + d + e \equiv 0 \text{ (mod. 7)} \qquad (3)$$

og af (2): $$a + b < 6.$$

Indsættes (2) i (3), faas

$$(a+b)(4+c) + c \equiv 0 \text{ (mod. 7)}.$$

Ved her at lade c variere finder man, at kun følgende Kombinationer ere mulige:

I. $a + b = 2,\ c = 2,\ d + e = 10$

og II. $a + b = 1,\ c = 5,\ d + e = 8.$

I spaltes igen i

$$a = 1,\ b = 1,\ c = 2,\ d + e = 10 \qquad (4)$$

og $$a = 2,\ b = 0,\ c = 2,\ d + e = 10. \qquad (5)$$

Idet $8d + e$ skrives som $d + e + 7d$, giver (4) ved Indsættelse i (1)

$$63m = 4096 + 512 + 128 + 10 + 7d = 4746 + 7d,$$

der er delelig med 7; for at det tillige skal være delelig med 9, maa $d = 6$, hvad der giver Løsningen:

4788 (i Ottetalsyst. 11264).

Paa samme Maade giver (5):

$$63\text{m} = 8192 + 128 + 107\text{d} = 8330 + 7\text{d},$$

hvoraf $d = 7$ og Løsningen:

8379 (20273).

I II er der kun én Mulighed: $a = 1$, $b = 0$, $c = 5$, $d + e = 8$, altsaa

$$63\text{m} = 4096 + 320 + 8 + 7\text{d} = 4424 + 7\text{d},$$

hvoraf $d = 7$ og Løsningen:

4473 (10571).

(Otto Larsen.)

Litteratur.

Versuch einer Methodik zur Lösung planimetrischer Konstruktionsaufgaben. Mit zahlreichen Beispielen. Zusammengestellt von F. J. Brockmann, vorm. Oberlehrer am Königl. Gymnasium zu Cleve. Leipzig 1889, Druck und Verlag von B. G. Teubner.

Forf. begrunder i Fortalen Udgivelsen af sit Værk med de Ord: »Wenn wir uns in der deutschen Litteratur der Mathematik vergebens nach einer Schrift umsehen,*) in welcher in systematischer Form eine »Methodik für die Behandlung planimetrischer Konstruktionsaufgaben« entwickelt wird, so dürfte jeder Versuch, durch Ausfüllung dieser Lücke den Unterricht fruchtbarer zu machen, von den Fachgenossen entschieden gebilligt werden.

So fruchtbar nämlich auch die einschlägige Litteratur in Leitfäden und Lehrbüchern für den systematischen Unterricht in der Geometrie genannt werden muss, in bezug auf eine systematische Methodik für die Auflösung von Konstruktionsaufgaben müssen wir dieselbe steril nennen. Weist dieselbe auch eine stattliche Anzahl von Auf- [illegible]gen auf, so verfolgen doch die uns bekannten [illegible] entweder die Schule mit hinreichendem

Übungsmaterial zu versehen, indem die Aufgaben dieser Sammlung oft nach Tausenden zählen, oder an einzelnen Beispielen für zusammengestellte Gruppen die Art der Behandlung zu zeigen. Wenn wir auch gern zugeben, dass die Sammlungen der letzten Art (beispielsweise die von Hoffmann [Paderborn, bei Schöningh], oder die von Lieber und von Lühmann [Berlin, bei Simion]) sich schon mehr einer Methodik nähern, so ist dieselbe doch nur als latent darin enthalten zu bezeichnen, von einer wirklich systematischen Methodik kan auch hier keine Rede sein.«

Man tør vel herefter ikke antage, at Jul. Petersens Methoder og Theorier, der dog foreligger i Udgaver paa en halv Snes forskellige Sprog, deriblandt naturligvis ogsaa paa Tysk (Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Constructionsaufgaben, angewandt auf etwa 400 Aufgaben, von Dr. Julius Petersen, Docent etc., unter Mitwirkung des Verfassers nach der zweiten Auflage des Originals ins Deutsche übertragen von Dr. R. von Fischer-Benzon, Oberlehrer am Gymnasium in Kiel. Kjøbenhavn 1879, Andr. Fred. Høst) — har været Forf. bekendt. Og et meget mærkeligt Tilfælde er det da, at Hr. B.'s Methodik i saa høj Grad er kommen til at ligne en Bearbejdelse af Prof. P.'s Bog, idet ganske vist Stoffet er ordnet noget anderledes, men iøvrigt Methoderne, Betegnelserne, tildels Instruktionsopgaverne ere de samme.

Hr. B begynder med at anføre de almindelige geometriske Steder med Anvendelser; angiver dernæst en »Methode durch Reduktion« ɔ: til en tidligere bekendt Opgave; »Reduktion durch Data« ɔ: 3 Stykker i en Trekant bestemme de øvrige o. lign.; »Methode durch Parallelverschiebung und Umlegung« spec. »Umlegung durch Drehung um eine Axe«.

Hr. B. gaar dernæst over til Behandling af Systemer i ligedan Beliggenhed og bemærker her bl. a.: »Da hierbei jede Länge PA' des neuen Systems aus der entsprechende Länge PA des gegebenen nach der Proportion PA' : PA = m : n

gewonnen wird, so dass $PA' = \frac{m}{n} . PA$ ist, so kann man diese Konstruktion passend eine Multiplikation des Systems mit $\pm \frac{m}{n}$ nennen, je nachdem eine direkt oder umgekehrt ähnliche Lage erhalten wird.« — og fortsætter lidt længere henne: »Findet nun in der oben näher bezeichneten Weise noch eine wirkliche Drehung der Figur um den Winkel δ statt, welche Operation, wenn $\frac{m}{n} = f$ gesetzt wird, symbolisch einfach als Multiplikation mit f_{δ} in bezug auf einen gegebenen Punkt bezeichnet werden kann . . .«. Som man ser, forbavsende Overensstemmelse med Prof. Petersens Betegnelser.

Hvis man ikke havde Fortalens Ord at holde sig til, kunde man da let mene, at Hr. Brockmann havde benyttet Prof. P.'s Bog ved Udarbejdelsen af sin — en Benyttelse, som behørig annonceret maa regnes for tilladelig; men som det er, kan man kun sige, at her er kommen til at foreligge et nyt — forøvrigt overflødigt — Bevis paa Fortræffeligheden af Prof. P.'s System, idet Hr. B., den sandsynligvis ansete og erfarne Pædagog, der hos et af Tysklands største Forlæggerfirmaer udgiver sin Methodik 23 Aar efter at Prof. P.'s første Gang udkom — i hvilke 23 Aar den mathematiske Undervisning og Hjælpemidlerne dertil i det hele har haft meget betydelig Fremgang — ikke har vidst at samle andre Methoder og bruge andre Betegnelser end Prof. P. eller bruge væsentlig forskelllige Øvelseseksempler.

Men Hr. B. burde have set sig bedre for, før han erklærede, at der i den tydske Litteratur ikke fandtes nogensomhelst systematisk Methodik til Løsning af Konstruktionsopgaver — da der dog altsaa faktisk fandtes i det mindste ét Værk, som i hvert Fald ikke staar tilbage for hans eget.

P. T. F.

Men alt i alt indeholder Bogen dog saa meget godt foruden det, vi have paapeget, at den nok vil kunne gøre Nytte i Borgerskolen; — dens Indhold stemmer forresten overens med Fordringerne til den nye Borgerskoleexamen —; hævde sin Plads vil den kun kunne gøre, naar Fejlene blive rettede i den næste Udgave.

P. T. F.

Opgaver til Løsning.

68. Find Ligningen for en ligesidet Hyperbel, der gaar igjennem Begyndelsespunktet og to andre givne Punkter, saaledes at disse blive diametralt modsatte paa Hyperblen. Hvilken Betingelse maa Afstandene fra Begyndelsespunktet til de to givne Punkter samt Vinklen mellem disse Afstande opfylde for at Begyndelsespunktet kan blive Hyperblens Toppunkt?

(E. Valentiner.)

69. Bevis, at en Diameter i en ligesidet Hyperbel fra et hvilketsomhelst Punkt af denne ses under en Vinkel, hvis Halveringslinier ere parallele med Axerne.

(Samme.)

70. Konstruer en Ottekant med ligestore Vinkler indskreven i en Cirkel, naar man kjender Forholdet mellem to sammenstødende Sider. Hvorvidt kan der konstrueres en n-kant med en given Side og med ligestore Vinkler indskreven i en given Cirkel?

(Samme.)

71. N hele Tal danne en Differensrække med Differensen
Summen af Leddene er et Potenstal af p'te Grad (p hel).
: tre nævnte Størrelser kunne ikke vælges i Flæng i Tal-
kken. Hvilke Indskrænkninger ere de underkastede?

(A. Weis.)

72. [1]) Hvorledes bestemmes to Kegler med samme Grundflade i en given Plan og med givne Toppunkter paa samme Side af og i forskellige Afstande fra denne, saaledes at de to Keglefladers Frembringere gjennem samme Punkt af Grundfladens Periferi danne ligestore Vinkler med Planen?

[2]) Hvorvidt er det muligt at bestemme endnu en Plan, der skærer de to Kegleflader (der tænkes forlængede i det uendelige) i kongruente Snit?

(Johannes Petersen.)

73. At løse Ligningen

$$1 + \frac{2x}{x + 4a} + \frac{27a^2}{2x^2 + 7ax - 4a^2} = \frac{6a}{2x - a}.$$

74. At diskutere Rødderne i Ligningen

$$(k^2 + k - 2)x^2 + 2(k + 1)x - (k + 1) = 0.$$

75. At bestemme et trecifret Tal med Tværsummen 14, som ved Division med 70 giver Resten 3.

76. At bestemme de trecifrede Tal, som ere saaledes beskafne, at Tallet er lig Summen af de 6 tocifrede Tal, der fremkomme ved at kombinere to af det ubekendte Tals Ciffre paa alle mulige Maader.

77. At bestemme det mindste hele Tal, der er 4 Gange saa stort som Produktet af sine Ciffre.

78. At bestemme et trecifret Tal saaledes, at det dobbelte af Tallet er lig Antallet af Ciffre i alle de hele Tal, der ikke ere større end det søgte Tal.

79. At bestemme de retvinklede Trekanter, hvis Sider ere hele Tal, hvor det Tal, der repræsenterer Perimeteren, [1]) enten er lig det Tal, der udtrykker Arealet, [2]) eller dobbelt saa stort som Arealtallet.

80. Bevis at $x^{4n} - x^{3n} + x^{2n} - x^n + 1$ er deleligt med $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$, naar n er ulige.

81. Bevis at $n^{13} - n$ er deleligt med 2730, naar n er et vilkaarligt helt Tal.

82. Find x af Ligningen

$$\sqrt{a^2 - x^2} + x\sqrt{a^2 - 1} = a^2(1 - x^2).$$

83. Find x, y og z af Ligningerne

$$xyz + x - y - z = a(1 + yz - zx - xy),$$
$$xyz + y - z - x = b(1 + zx - xy - yz),$$
$$xyz + z - x - y = c(1 + xy - yz - zx).$$

84. To ligestore Cirkler røre en ret Linie AB paa samme Side. Find paa den rette Linie et Punkt M saaledes, at de andre Tangenter fra dette Punkt til Cirklerne danne en given Vinkel α.

85. En Trekant ABC er indskrevet i en Cirkel, D er Midtpunktet af Buen BAC. Bevis, at Produktet af Siderne AB og AC er lig Differensen mellem Kvadraterne paa Linierne DB og DA.

(73—85 efter Mathesis.)

Korrespondance.

Spørgsmaal. Hvorledes beviste Pythagoras sin Læresætning?

R — D.

Svar. Derom véd man intet sikkert; forskellige Hypoteser ere opstillede. Sé f. Ex. La Cour: Historisk Mathematik, S. 156 o. flg.

Til Spørgsmaalet: De hele Tals Opløsning i Faktorer. I.

(Af F. Thaarup.)

Til Fermats Sætning:

Naar n er et Primtal og primisk med a, er

$$a^{n-1} \equiv 1 \; ^{*})$$

slutter sig dels Modsætningen:

Naar et (ulige) Tal n er et sammensat Tal og primisk med a, er

$$a^{n-1} \text{ ikke } \equiv 1,$$

medmindre n kan opløses i et eller flere Systemer af to Faktorer n_1 og N_1, hvoraf den ene er et Primtal, og som ere saaledes beskafne, at $n_1 - 1$ og $N_1 - 1$ have en fælles Faktor, der tillige er Faktor i $n - 1$,

og dels de to omvendte Sætninger:

Naar a er primisk med n og $a^{n-1} \equiv 1$, er n enten et Primtal eller sammensat paa den ovennævnte Maade.

Naar a er primisk med n og a^{n-1} ikke $\equiv 1$, er n et sammensat Tal.

Beviset for Modsætningen kan føres saaledes:

Naar p er et Primtal, gaar p op i $a^{p-1} - 1 = (a^{\frac{p-1}{2}} - 1)(a^{\frac{p-1}{2}} + 1)$. Nu er det muligt, at p gaaer op i den første af disse to Faktorer, og at denne atter kan opløses i to Faktorer, hvoraf den ene ogsaa har Formen $a^k - 1$ og er et Multiplum af p o. s. fr. Er m den laveste Faktor i $p - 1$, for hvilken man har $a^m \equiv 1$ (mod. p), kan man ikke have $a^r \equiv 1$ (mod. p), medmindre r et Multiplum af m, fordi a^{mq+s} $(s < m)$ $= a^{mq} . a^s \equiv a^s$ (mod. p), som ikke kan være $\equiv 1$ (mod. p).

Heraf følger, at hvis n er et Produkt af Primfaktorerne $n_1, n_2, \ldots, n_p$ og gaaer op i $a^{n-1} - 1$, maa $n - 1$ have en Faktor fælles med hver enkelt af Størrelserne $n_1 - 1$, $n_2 - 1$, $\ldots, n_p - 1$.

---

*) modulus udelades her som overalt i det Følgende, hvor

Man har nu, idet R betegner hele den flerleddede Størrelse, man faaer ved at udvikle Produktet af de $p - 1$ sidste Faktorer i $(n_1 - 1)(n_2 - 1)\ldots(n_p - 1)$, paa det første Led nær:

$$(n_1 - 1)(n_2 - 1)\ldots(n_p - 1) = (n_1 - 1)(n_2 n_3 \ldots n_p + R)$$
$$= n_1 n_2 n_3 \ldots n_p - n_2 n_3 \ldots n_p + (n_1 - 1)R$$
$$= n_1 n_2 n_3 \ldots n_p - 1 - (n_2 n_3 \ldots n_p - 1) + (n_1 - 1)R$$
$$= n - 1 - (N_1 - 1) + (n_1 - 1)R,$$

idet $N_1 = \frac{n}{n_1}$. Men af Ligningen

$$(n_1 - 1)(n_2 - 1)\ldots(n_p - 1) = n - 1 - (N_1 - 1) + (n_1 - 1)R$$

sés det, at enhver Faktor, der er fælles for $n_1 - 1$ og $n - 1$, ogsaa maa være Faktor i $N_1 - 1$.

De Resultater m. H. t. n's Opløselighed, man kan opnaa ved at undersøge, om man har eller ikke har Kongruensen $a^{n-1} \equiv 1$, ere efter det Foregaaende altsaa følgende:

Har man ikke Kongruensen, er man sikker paa, at n er sammensat.

Har man den derimod, kan det ikke afgjøres, om n er et Primtal eller sammensat, medmindre man kan opløse $n - 1$ i Faktorer. Formaaer man dette, kan man i mange Tilfælde afgjøre Spørgsmaalet, men har man tillige Kongruensen $a^p \equiv 1$, idet p er den laveste Faktor i $n - 1$, der gjør en saadan Kongruens mulig, og er p desuden saa lille, at n kan rumme to Faktorer af Formen $2mp + 1$, har man kun opnaaet at faae denne Form bestemt, ellers Intet.

Den praktiske Gjennemførelse af den nævnte Undersøgelse kræver som Betingelse, at man i det mindste relativt hurtigt kan bestemme fjerne Led i den Restperiode, der dannes af de successive Potenser af a.

Den korteste Vej, man kan gaae for at komme videre fra r_m — et vilkaarligt Led i denne Periode — er at kvadrere, idet man derved naaer til $r_{2m} \equiv r_m^2$, men saasnart n er et lidt større Tal, bliver Operationen besværlig, og en mulig Regne- melder sig ikke selv. Vil man slaae noget af paa Hurtig-

heden, kan man gaae en anden Vej, ad hvilken man stadigt regner med Minimalværdier og finder Resultaterne ved Divisioner, der skulle gaae op.

Tænker man sig Leddene i Restperioden, d. v. s. Minimalværdierne $< n$, opstillede ækvidistant paa en Cirkelperiferi, saaledes at $r_0 \equiv r_P = 1$ — idet P betegner Leddenes Antal — staaer paa den øverste Plads og r_1 f. Ex. til højre Side derfor, kommer r_{P-m} til at staa paa samme Horizontallinie som r_m, og man har $r_m r_{P-m} \equiv 1$. Benyttes den simplere Betegnelse r_{-m} for r_{P-m}, danne altsaa r_m og r_{-m} et Reciprokpar, fordi deres Produkt er $\equiv 1$, og Multiplikation af et eller andet Led i Perioden med den ene af dem giver samme Led som Division med den anden.

Er man nu f. Ex. ved at sætte $r_1 = 2$ og potensere naaet til r_m, bestemmer man $r_{-m} = x$ ved at løse Ligningen

$$r_m x - ny = 1,$$

derefter $r_{2m} = x$ ved Ligningen

$$r_{-m} x - ny = r_m$$

og atter $r_{-3m} = x$ ved Ligningen

$$r_{2m} x - ny = r_{-m}$$

o. s. v.

Da i alle disse Ligninger Koefficienten til y er $>$ begge de andre Koefficienter, vil man ved at bruge den i dette Tidsskrift Aarg. 1890 p. 1 angivne Methode stedse umiddelbart finde en Minimalværdi for x.

Indices for de saaledes efterhaanden fundne Led blive altsaa m Gange Leddene i Rækken

$$-1,\ 2,\ -3,\ 5,\ -8,\ 13\ldots$$

Tager man ikke Hensyn til Fortegnet, er denne Række bestemt ved

$$l_{p+1} = l_p + l_{p-1}$$

og

$$l_p^2 \pm 1 = l_{p+1} \cdot l_{p-1},$$

idet l_p betegner det almindelige Led.

Dette giver

$$l_p = \frac{l_{p-1} + \sqrt{5 l_{p-1}^2 \mp 4}}{2}.$$

$$1{,}045^7 - \frac{6}{4{,}5}(1{,}045^7 - 1) = \frac{5}{4{,}5}\left(1 - \frac{1}{1{,}045^n}\right),$$

hvoraf
$$1{,}045^n = \frac{5}{1{,}5 \cdot 1{,}045^7 - 1},$$
$$n = 35{,}6.$$

6. En sfer och en oktaeder hafva samma volym. Hvad är förhållandet mellan deras ytor?

Opløsning. Kaldes Kuglens Radius r, mindste Radius, Kant og Overflade i Oktaedret (der forudsættes regulært) henholdsvis a, k og O, er ifl. Opgaven

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}a \cdot O,$$
$$\frac{4\pi r^2}{O} = \frac{a}{r}.$$

Endvidere $O = 2k^2\sqrt{3}$ og $a = k\frac{\sqrt{6}}{6}$, altsaa $k = a\sqrt{6}$ og

$$O = 12a^2\sqrt{3}.$$
$$4\pi r^3 = 12a^3\sqrt{3},$$

der giver
$$\frac{a}{r} = \frac{\sqrt[3]{\pi}}{\sqrt{3}}.$$

7. Bevisa, att om ett helt tal är multipel af 11, summan af alla dess sifror med jemna ordningsnummer antingen är lika med summan af de öfriga eller skilja sig derifrån med en multipel af 11!

Beviset tør forudsættes bekendt fra Lærebøgerne.

Geometriska uppgifter.

1. Utdrag en gifven rät linie AB till C så, att rektangeln af hela Linien AC och den tillfogade linien BC blir lika stor med en gifven qvadrat!

Opløsning. Sættes AB = l, det givne Kvadrat = a^2, ... er

$$BC = \frac{\sqrt{l^2 + 4a^2} - l}{2},$$

...t konstrueres.

2. Hvad är trigonometriska tangenten för vinkeln mellan de två räta linierna

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0?$$

Opløsning. $\frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{c + a}$.

3. Bevisa, att i hvarje likbent triangel förhåller sig perimetern till de båda lika stora sidornas summas öfverskott öfver basen så som qvadraten på basen till qvadraten på den inskrifne cirkelns diameter!

Opløsning. Kaldes Toppunktet A, de andre Vinkelspidser B og C, Højdefodpunktet D, Centrum for den indskrevne Cirkel A, dens Røringspunkt med AC E, er

$$\triangle AOE \sim \triangle ACD,$$

hvoraf

$$\frac{AE}{AD} = \frac{OE}{DC}$$

eller

$$\frac{AC - CD}{\sqrt{AC^2 - CD^2}} = \frac{OE}{CD} = \sqrt{\frac{AC - CD}{AC + CD}}$$

eller

$$\frac{2AC + BC}{2AC - BC} = \frac{BC^2}{(2OE)^2},$$

hv. sk. bev.

4. Gifna äro en rät linie L och en punkt O utom densamma. Från en godtycklig punkt P på L dragas mot densamma en perpendikel PQ, lika stor med OP. Hvilken är orten för Q?

Opløsning. Vælges L til Abscisseaxe for et retvinklet Koordinatsystem, hvis Ordinataxe gaar gennem O, der antages at have Ordinaten a, faar den søgte Kurve Ligningen

$$y = \pm\sqrt{x^2 + a^2}$$

eller

$$y^2 - x^2 = a^2.$$

Det geometriske Sted er altsaa en ligesidet Hyperbel med Toppunkt i O, Centrum i O's Projektion paa L.

5. En regulier månghörning är gifven. Att konstruera en cirkel, som skär sidorna i sådana punkter, att de blifva vinkelspetsar i en regulier månghörning med dubbelt så stort antal sidor.

Opløsning. Den søgte Cirkels Centrum er den givne regulære Polygons Centrum O. Lad en Side i den givne være AB, og Cirklen skære denne i D og E; AB og DE have da samme Midtpunkt M, men $\angle$ MOE = $\frac{1}{2}$ $\angle$ MOB. Derved er Radius OE bestemt.

6. Hvilken har den största omkretsen af alla trianglar med gifven bas och gifven vinkel vid spetsen?

Opløsning. Det geometriske Sted for Toppunktet er en Bue over den givne Basis som Korde, rummende den givne Vinkel. Som bekendt bliver Summen af to Korder, der tilsammen spænde over en given Bue, Maximum, naar Korderne ere ligestore. Den søgte Trekant bliver altsaa ligebenet.

7. Drag en rät linie genom två koncentriska cirklar så, att de båda kordorna stå till hvarandra i ett gifvet förhållande!

Opløsning. Kaldes Skæringspunkterne i Orden A, B, C og D og skal $\frac{BC}{AD} = \frac{p}{q}$, findes let $\frac{AC}{AD} = \frac{q+p}{2q}$.

Punktet A vælges vilkaarligt paa den yderste Cirkel c og med det som Fællespunkt tegnes en Cirkel c' ligedannet med c i Forholdet $\frac{q+p}{2q}$. c' vil da skære den inderste Cirkel i C.

Uppgifter af mekaniskt och fysikaliskt innehåll.

1. En ursprungligen rektangelformig metallplåt har blifvit böjd så, att den motsvarar fjerdedelen af ett cylindriskt rör af 8 dm.'s diameter, och hvilar med den buktiga ytan mot ett vågrätt plan. Längs hvardera af plåtens båda raka kanter äro fastlödda metallstänger, den ena 3 gånger så tung som den andra. Huru stor blir skilnaden i höjd mellan dessa båda kanter, då plåtens egen vigt kan lemnas utan afseende?

Opløsning. $r = 4.$

$$p \cdot r\cos\alpha = 3p \cdot r\sin\alpha.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}.$$

$$x = r\cos\alpha - r\sin\alpha,$$ hvoraf ifølge (1)

$$x = 2r\sin\alpha = 2r\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{4}{5}\sqrt{10}.$$

2. Från en höjd af 230 meter faller en blykula ned mot marken. Den bringas her genom stöten ögonblickligen i hvila, hvarvid kulans rörelse-energi (lefvande kraft) omsättes i värme. Huru många procent deraf kommer kulan till del, då hennes temperatur i följd af stöten stiger $11^0,4$?

Blyets egentliga värme är 0,031; mot 1 värmeenhet svarar ett arbete af 425 enheter.

Opløsning. Kaldes Kuglens Vægt p, er den hele Energimængde, der omsættes til Varme, 230 . p; den Del, som gaar over i Kuglen: 425 . p . 0,031 . 11,4. Kuglen modtager altsaa $\frac{425 \cdot p \cdot 0{,}031 \cdot 11{,}4}{p \cdot 230} \cdot 100\,\% = 65{,}32\,\%$.

3. En luftpumps klocka innehåller luft, hvars tryck till en början mätes af en 75 cm. hög qvicksilfverpelare. Ett 4 pumpslag har trycket minskats till 28 cm. Då kannan är fullt uppdragen, rymmer pumpstöfveln 2,1 liter. Huru mycket rymmer klockan?

Opløsning. Kaldes Klokkens Rumfang x, har man

$$28 = \left(\frac{x}{x+2{,}1}\right)^4 \cdot 75,$$

hvoraf

$$x = 7{,}5 \text{ Liter.}$$

4. En sferisk ballong, hvars diameter är 8 dm., är förfärdigad af tunt papper, hvaraf hvarje qvadratmeter väger 22 gr., och är fyld med varm luft af den yttre luftens tryck. Huru hög måste temperaturen i ballongen minst vara för att denna skall sväfva fritt i den yttre luften, hvars temperatur är 9^0? ... barometerståndet väger 1 liter noll-... utvidgningskoefficient för värme

Opløsning. Ballonens Overflade er 64π □ dcm., Papirets Vægt altsaa $64\pi \cdot \frac{22}{100}$ gr. Man faar altsaa

$$\frac{64\pi \cdot 22}{100} + \frac{1{,}29 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 64}{1 + \frac{t}{273}} = \frac{1{,}29 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 64}{1 + \frac{9}{273}},$$

hvoraf

$$t = 51{,}9^0.$$

5. Ett snabbt roterande kugghjul har 180 små kuggar, hvilka under rörelsen slå mot kanten af ett kort. Derigenom alstras en ton, densamma som angifves af en 12 cm. lång svängande sträng. En annan sträng af samma ämne, hvars längd är 54 cm., gör 296 svängningar i sekunden. De vigter, som spänna dessa båda strängar, förhålla sig till hvarandra direkt som strängarnes genomskärningsytor. Huru stor är kugghjulets omloppstid?

Opløsning. Hjulet gjør n Omdrejninger pr. Sek., den første Stræng har altsaa Svingningstallet n . 180. Da nu Svingningstallet er omv. prop. med Strængens Længde og Radius i Tværsnittet samt ligefrem prop. med Kvadratroden af den strammende Vægt, har man, idet Radierne kaldes r og r_1, Vægtene p og p_1:

$$\frac{n \cdot 180}{296} = \frac{54}{12} \cdot \frac{r_1}{r} \cdot \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p_1}},$$

if. det givne er $\frac{r^2}{r_1^2} = \frac{p}{p_1}$, altsaa

$$\frac{n \cdot 180}{296} = \frac{54}{12} \text{ ɔ: } n = 7{,}4.$$

Hjulets Omløbstid er alsaa $\frac{5}{37}$ Sek.

6. En stråle hvitt ljus infaller vinkelrätt mot den ena ytan af ett glasprisma, hvars brytande vinkel är 33^0. Efter utträdet ur prismat gör det röda ljuset med det violetta en vinkel af $2^0\ 38'$. Huru stor är det violetta ljusets brytningsexponent, då det röda ljusets är 1,60?

Opløsning. $\frac{\sin i}{\sin 33^0} = 1{,}60$

hvoraf $i = 60^0\ 37'\ 26''$

$$n = \frac{\sin 63^0\ 15'\ 26''}{\sin 33^0}$$

$$n = 1{,}6397.$$

7. En elektrisk strömbana är mellan två af sina punkter delad i två grenar. Den ena af dessa utgöres af en koppartråd af 3 m.'s längd och 0,5 qvmm.'s genomskärningsyta, den andra af en nysilfvertråd, hvars längd är 7 m. och genomskärningsyta 0,4 qvmm. Om man borttager nysilfvertråden, kan man genom att minska längden af koppartråden, som nu ensam skall fortleda strömmen mellan de båda punkterna, åstadkomma, att strömstyrkan i de öfriga delarne af ledningen förblir densamma som förut. Huru mycket skall koppartråden afkortas? Nysilfrets egentliga ledningsmotstånd är 0,2, kopparns 0,02.

Opløsning. Kaldes Modstandene i de 2 Grene m og m_1, den søgte Længde x, er:

$$\frac{m\,m_1}{m + m_1} = 0{,}02 \cdot \frac{x}{0{,}5},$$

$$\frac{0{,}02 \cdot \frac{3}{0{,}5} \cdot 0{,}2 \cdot \frac{7}{0{,}4}}{0{,}02 \cdot \frac{3}{0{,}5} + 0{,}2 \cdot \frac{7}{0{,}4}} = 0{,}02 \cdot \frac{x}{0{,}5}$$

$$x = 2{,}9^{m}.$$

Danske Examensopgaver.

Skolelærerexamen 1891.

(Løsningerne ved J. Byskov.)

Regneopgave Nr. 1.

(3 Timer.)

For en Ladning Kul paa 5140,8 danske Tønder be-

a. Indkjøbsprisen i England, som er 1 Lstl. $11\frac{1}{2}$ sh. for $7\frac{3}{11}$ Quarter;

b. 785 Kr. 96 Øre i Omkostninger ved Indladningen;

c. i Fragt 60,6 Øre pr. Quarter;

d. i Assurance $3\frac{1}{3}$ pCt. af en saa stor Sum, at han i Tilfælde af Ladningens Tab faar Erstatning for alle hidtil nævnte Udgifter (Assurancen medregnet).

Efter Ladningens Modtagelse her betaler A endvidere:

e. Tolden, og Kullene staa ham nu i en Pris af 2 Kr. 50 Øre Tønden.

I. Der søges hver af de under a, c, d og e nævnte Udgifter.

Efter Kullenes Rensning er der tilbage 5120 Tønder, som han vil sortere i store og smaa Kul og sælge saaledes, at han kan have $15\frac{5}{8}$ pCt. af den samlede Salgssum i ren Fortjeneste. Hvor mange Tønder af hver Sort maa der være, og til hvilke Priser maa de sælges:

II. Hvis Priserne pr. Tønde af store og smaa Kul skulle forholde sig som 20 til 17, og de samlede Salgssummer af de 2 Sorter som 4 til 3?

III. Hvis 1 Tønde store og 1 Tønde smaa Kul tilsammen skulle koste 5,60 Kr., og Priserne pr. Tønde forholde sig som Tøndernes Antal?

(1 dansk Tønde = 5,5 Kubikfod; 1 Quarter = 11,55 Kubikfod; 1 Lstl. = 20 sh. = 17,60 Kr.)

Opløsning.

I. $a = 5140{,}8 \cdot \frac{5{,}5}{11{,}55} \cdot \frac{31\frac{1}{2}}{7\frac{3}{11}} = 10602{,}9$ sh.

$= 9330$ Kr. 55,2 Øre.

$c = 5140{,}8 \cdot \frac{5{,}5}{11{,}55} \cdot 60{,}6 = 1483$ Kr. 48,8 Øre.

Indkpr. + Omk. + Fr. = 11600 Kr.

Forliser Ladningen, maa han for hver 100 Kr., han faar udbetalt, tage $3\frac{1}{3}$ Kr. fra til Dækning af Assurancepræmie og han har da kun $96\frac{2}{3}$ Kr. til Dækning af sine øvrige U...er (Indk. + Omk. + Fr.); altsaa haves Forholdstallene

Udgifter	Præmien	Den assurerede Sum
$96\frac{2}{3}$.	$3\frac{1}{3}$.	100.

$d = 11600 \cdot \frac{3\frac{1}{3}}{96\frac{2}{3}} = 400$ Kr. Han har Kornet til $5140{,}8 \cdot 2{,}50$ $= 12852$ Kr.

$e = 12852 - (11600 + 400) = 852$ Kr.

II. Salgssummen $= 12852 \cdot \frac{100}{84\frac{3}{8}} = 15232$ Kr.

Da de samlede Salgssummer forholde sig som $4:3$ og Priserne pr. Td. som $20:17$, maa Antallet af Tdr. forholde sig som $4:20$ til $3:17$ som $17:15$. Altsaa er der af store Kul $\frac{17}{17+15} \cdot 5120 = 2720$ Tdr.; af smaa 2400 Tdr.

Den samlede Udspr. for de store Kul $15232 \cdot \frac{4}{7} = 8704$; Udspr. pr. Td. $= \frac{8704}{2720} = 360$ Øre.

Den samlede Udspr. for de smaa Kul $15232 \cdot \frac{3}{7} = 6528$; Udspr. pr. Td. $= \frac{6528}{2400} = 272$ Øre.

III. x Tdr. store Kul à y Øre; $(5120 - x)$ Tdr. smaa Kul à $(560 - y)$ Øre.

α) $\frac{x}{5120 - x} = \frac{y}{560 - y}$; $\frac{x}{y} = \frac{5120 - x}{560 - y} = \frac{5120}{560} = \frac{64}{7}$;

$$x = \frac{64}{7}y$$

β) $xy + (5120 - x)(560 - y) = 1523200$. Ved at indsætte Værdien af (α) for x og ordne Ligningerne faar man $y^2 - 560y + 73500 = 0$. Denne sidste Ligning giver $y = \begin{cases} 350 \text{ Øre} \\ 210 \text{ Øre} \end{cases}$. Forholdet mellem disse Priser = Forholdet mellem Antallet af Tdr. ...

Af det dyr... 5120 = 3200 Tdr.; af det ...

Regneopgave Nr. 2.

(2 Timer.)

A og B eje hver 12500 Kr. A sætter sine Penge paa Rente til 3,812 pCt. p. A., Rente af Rente, i 4 Aar, men optager ved hvert Aars Slutning en ligestor Sum saaledes, at han efter de 4 Aar ejer 10080 Kr. B sætter sine Penge i en Handel, ved hvilken han det første Aar tjener dobbelt saa mange pCt. som i 2det, men i 3die og 4de Aar taber han henholdsvis lige saa mange pCt., som han har tjent i 1ste og 2det Aar, idet Fortjeneste og Tab for hvert Aar beregnes af den Sum, han har i Handelen ved det paagjældende Aars Begyndelse. Naar efter de 4 Aar B ejer lige saa meget, som A har paa Rente (nemlig 10080 Kr.) saa spørges:

I. Hvor stor var den Sum, A optog ved hvert Aars Slutning?

II. Hvor mange pCt. tjente B det sidste Aar?

Opløsning.

I. Man har, idet den aarlig optagne Sum er x,

$$12500 . 1{,}03812^4 - 10080 = x . \frac{1{,}03812^4 - 1}{0{,}03812}$$

$$4438 = x . \frac{0{,}16145}{0{,}03812};\ x = \frac{4438 . 0{,}03812}{0{,}16145} = 1047{,}875.$$

II. $12500\,(1 + 2x)\,(1 + x)\,(1 - 2x)\,(1 - x) = 10080;$

$$(1 - 4x^2)\,(1 - x^2) = \frac{10080}{12500} = 0{;}8064;$$

$$4x^4 - 5x^2 + 0{,}1936 = 0.$$

$$x^4 - 1{,}25x^2 + 0{,}0484 = 0;$$

$$x^2 = 0{,}625 \pm \sqrt{0{,}625^2 - 0{,}22^2} = 0{,}625 \pm 0{,}585 = \begin{cases} 1{,}210 \\ 0{,}040 \end{cases}.$$

$$x = \begin{cases} \sqrt{1{,}21} = 1{,}1 \\ \sqrt{0{,}04} = 0{,}2 \end{cases} \text{Fortjenesten} = \begin{cases} 110\ \% \\ 20\ \% \end{cases}.$$

Af Hensyn til de to sidste Aars Tab maa Løsningen 110 % forkastes.

Regneopgave Nr. 3.

(2 Timer.)

Et Hus bestaar af 3 lige lange, brede og høje Længer, som begrænse de 3 Sider af en kvadratisk Gaardsplads. De

ere sammenbyggede saaledes, at den midterste Længes Gavlflader under og over Loftet ligge i Forlængelsen henholdsvis af de ydre Sidemure og Tagflader i Sidelængerne, hvorimod disses frie Gavle ere lodrette. Tagryggenes samlede Længde er 100 Alen, den lodrette Højde fra Loft til Tagryg 12 Alen; Husenes Brede er 10 Alen, og Sidemurenes Højde 5 Alen. — Endvidere er der paa hver af den mellemste Længes Sider en Kvist, idet 10 Alen af Sidemuren er forlænget opad med en Mur paa 8 Alens Højde, og fra dennes Overkant til Tagryggen er der et overalt lige bredt Tag, hvilket ligesom de øvrige skraa Tagflader er tækket med Tagsten. Kvistenes Endeflader ere lukkede med Brædder.

I. Hvor stort er Husets Rumfang uden Kvistene?

II. Hvor stort med disse?

III. Hvor mange Tagsten, hvoraf hver dækker en Flade, 12 Tommer lang, 9,6 Tomme bred, er der brugt til Huset?

Opløsning.

I. Sidelængerne kunne lægges i Forlængelsen af Midterlængen, da Skraaningen af Tagets Sideflader og Gavle er den samme. Bygningen bliver da — saavel i Henseende til Volumen som Overflade — at betragte som et ret Prisme med Længden $= 100$ Alen og Grundfladen $= 10 . 5 + \frac{12 . 10}{2}$ $= 110$ □ Alen. Volumenet $= 100 . 110 = 11000$ Kubikalen.

II. Kvistene ere rette tresidede Prismer med Højden $= 10$ Alen; Grundfl. $= \frac{8 . 5}{2} = 20$ Alen. Begge Kvistes Volumen $= 2 . 10 . 20 = 400$ Kubikalen.

III. Tagfladernes skraa Sidelinie $= \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ Al. Naar intet Hensyn tages til Kvistene, bliver Sidefladernes Ar. $= 2 . 100 . 13 = 2600$ □ Al.

Kvistens Tagflader ere Rektangler med Grundl. $= 10$ Al. og Højden $=$ Hypothenusen i en retvinklet Trekant med

Katheterne 5 og 12—8 Alen. Højden $= \sqrt{5^2 + 4^2} =$ c. 6,4 Al. Arealet af disse Tagflader $= 10 . 6{,}4 . 2 = 128$ □ Al.

Kvistene dække en Tagflade paa $2 . 10 . 13 = 260$ □ Al.

Hele Tagets Areal $= 2600 - 260 + 128 = 2468$ □ Al.

Hver Tagsten dækker en Flade paa $\frac{12}{24} . \frac{9{,}6}{24} = \frac{1}{5}$ □ Al.

Der medgaar da ialt $2468 . 5 = 12340$ Sten.

Geometrisk Tegning.

A |————————————| B.

Midt paa Papiret tegnes en ligesidet Trekant CDE med Siden = AB. — Om C som Centrum tegnes en Cirkel med Radius = $\frac{1}{3}$ AB, og denne omskrives med en ligebenet Trekant, hvis lige lange Ben udgaa fra D; en anden omskreven ligebenet Trekant har paa lignende Maade Toppunktet i E. Gjennem en af dennes Vinkelspidser ved Grundlinien lægges en ny Cirkel med Centrum i C, og denne omskrives paa samme Maade med 2 ligebenede Trekanter med Toppunkter i D og E. — Konstruktionerne gjentages, idet Punkterne C, D og E skifte Rolle (altsaa tilføjes 2 Cirkler med Centrum i D og 2 med Centrum i E samt 8 derom omskrevne ligebenede Trekanter).

De 3 store Cirkler og den ligesidede Trekant punkteres; de 6 store omskrevne Trekanter trækkes med tyk Linie, det øvrige med fin Linie.

Skolelærerinde-Examen (extraord.)

(Maj 1891.)

Regneopgave Nr. 1.

(2 Timer.)

En Bager kan paatage sig at levere Brød i 30 Dage til et Kompagni Soldater, hvoraf hver skal have $1\frac{3}{4}$ Pd. daglig. Fra Begyndelsen er der 1640 Mand, men efter 14 Dage bort-

sendes 240, og 12 Dage senere formindskes Styrken endvidere med 69 Mand. — Først kjøber han 174 Tdr. $1\frac{1}{8}$ Fdkr. Rug, hvoraf hver Tønde koster 13,20 Kr. og veier $213\frac{1}{3}$ Pd., og til Resten kjøber han Rug til 224 Pd. og en Pris af 12,32 Kr. pr. Tønde. Af det første Parti faaes i Vægt $\frac{1}{8}$, af det sidste $\frac{1}{7}$ mere Brød end Rug. Naar hans øvrige Omkostninger udgjøre 23 pCt. af hans samlede Udgift, og han har $33\frac{7}{8}$ pCt. af denne i ren Nettofortjeneste, saa spørges:

I. Af hvor mange Tønder bestod det 2. Parti Rug?

II. Hvor meget udgjorde hans hele Udgift.

III. Hvor stor var hans Fortjeneste?

IV. Hvad fik han for 1 Pd. Brød?

Besvarelsen maa gives saa udførlig, at Fremgangsmaaden tydeligt sees.

Opløsning.

Der er leveret $1\frac{3}{4}$ (1640 . 14 + 1400 . 12 + 1331 . 4) = 78897 ℔.

Det første Parti Rug har givet $174\frac{3}{80} \cdot 213\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{8} = 41769$ ℔, det andet Parti har altsaa bestaaet af

$$\frac{78897 - 41769}{224 \cdot \frac{8}{7}} = 145\tfrac{1}{32} \text{ Td.} \qquad \text{I}$$

Hele Udgiften udgør

$$\left(174\tfrac{3}{80} \cdot 13{,}20 + 145\tfrac{1}{32} \cdot 12.32\right)\frac{100}{77} = 5304 \text{ Kr.} \qquad \text{II}$$

$$\text{Fortjenesten er } 5304 \cdot \frac{33\frac{7}{8}}{100} = 1796{,}73 \text{ Øre} \qquad \text{III}$$

$$\text{Hvert Pund har kostet } \frac{710073}{78897} = 9 \text{ Øre} \qquad \text{IV.}$$

Regneopgave Nr. 2.

(2 Timer.)

A har sat $\frac{1}{4}$ af sin Formue paa Rente til Resten til $4\frac{1}{4}$ pCt. p. a.

I. Hvor stor var den udsatte Kapital, naar den tillige med 1 Aars Renter udgjorde 17,514 Kr. 70 Øre?

Han hæver Summen og afrunder den til 18,000 Kr., som han vil udsætte saaledes, at hans aarlige Renter blive 800 Kr.

II. Hvis han udsætter den dels til $4\frac{1}{5}$ og dels til $4\frac{3}{4}$ pCt. p. a., hvor mange Penge maa han da udsætte til hver Rentefod?

III. Hvis han deler Summen i 3 Dele, som udsættes henholdsvis til $4\frac{2}{5}$, $4\frac{1}{2}$ og $4\frac{1}{3}$ pCt. p. a., men den 2. af disse Dele er dobbelt saa stor som den 1., hvor stor er da hver Del?

IV. Hvis Summen deles i 3 lige store Dele, af hvilken den 2. giver $\frac{1}{12}$, den 3. $\frac{1}{4}$ pCt. p. a. højere Rente end den 1., til hvor mange pCt. p. a. er da hver Del udsat?

Besvarelsen skal gives saa udførlig, at Fremgangsmaaden tydelig sees.

Opløsning. I. Gennemsnitsrenten er $4\frac{61}{240}$ p. C. p. a., den udsatte Kapital har altsaa udgjort

$$17514{,}70 \cdot \frac{100}{104\frac{61}{240}} = 16800 \text{ Kr.}$$

II. Til $4\frac{1}{5}$ p. C. er udsat

$$\frac{18000 \cdot 4\frac{3}{4} - 800 \cdot 100}{4\frac{3}{4} - 4\frac{1}{5}} = 10000 \text{ Kr.}$$

og til $4\frac{3}{4}$ p. C. 8000 Kr.

III. Den første Del er

$$\frac{800 \cdot 100 - 18000 \cdot 4\frac{1}{3}}{4\frac{2}{5} + 2 \cdot 4\frac{1}{2} - 3 \cdot 4\frac{1}{3}} = 5000 \text{ Kr.,}$$

den anden Del er 10000 Kr. og den tredje 3000 Kr.

IV. Procenten til den første Del er

$$\frac{800 \cdot 100 - (\frac{1}{12} + \frac{1}{4})\,6000}{18000} = 4\frac{1}{3},$$

til den anden $4\frac{5}{12}$ og til den tredje $4\frac{7}{12}$.

N. B.

Overgangsprøven ved Søofficersskolen.

(1891.)

I.

1. Paa en Kugleflade, hvis Radius er $=1$ Fod, ligger en retvinklet sphærisk Trekant med Katheterne $65^0\ 9'\ 10''$ og $44^0\ 50'\ 50''$. Find dens Areal.

2. Find de Vinkler indenfor de 4 første Kvadranter, der tilfredsstille Ligningerne:

$$27(\cos 3x + \cos 3y) + 1 = 0$$
$$3(\cos x + \cos x) + 1 = 0.$$

Opløsning.

1. $\operatorname{tg} B = \dfrac{\operatorname{tg} 65^0\ 9'\ 10''}{\sin 44^0\ 50'\ 50''},\quad B = 71^0\ 54'\ 52''$

$\operatorname{tg} C = \dfrac{\operatorname{tg} 44^0\ 50'\ 50''}{\sin 65^0\ 9'\ 10''},\quad C = 47^0\ 37'\ 37''$

$$\begin{array}{r} 90^0 \\ \hline 209^0\ 32'\ 29'' \\ 180^0 \\ \hline 29^0\ 32'\ 29'' \end{array}$$

Arealet $= \dfrac{106349}{2592000} \cdot 4\pi = 0{,}5156.$

2. $27\,[4(\cos^3 x + \cos^3 y) - 3(\cos x + \cos y)] + 1$

$$= 108(\cos^3 x + \cos^3 y) + 28 = 0.$$

$$\cos^3 x + \cos^3 y = -\frac{1}{27} - 3\cos x \cos y(\cos x + \cos y)$$
$$= -\frac{1}{27} + \cos x \cos y = -\frac{7}{27}.$$
$$\cos x \cos y = -\frac{2}{9}.$$
$$\left.\begin{matrix}\cos x \\ \cos y\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{2}{3}\end{matrix}\right.$$

$$x = \begin{cases} 70^0\ 31'\ 43'' \\ 289^0\ 28'\ 17'' \end{cases},\quad y = \begin{cases} 131^0\ 48'\ 39'' \\ 228^0\ 11'\ 21'' \end{cases}$$

eller omvendt.

II.

I et Parallelopipedum er givet 3 fra samme Hjørnespids A udgaaende Kanter: AB = 17 Fod, AC = 10 Fod, AD = 23 Fod. Tillige er givet BC = 21 Fod samt ∠ DAB = 60° 2′ og ∠ DAC = 71° 8′. Find Parallelopipedets Overflade og Rumfang.

Opløsning. △ ABC = $\sqrt{24 . 3 . 14 . 7}$ = 84 Kvf.

ABED = 17 . 23 . sin 60° 2′ = 338,73

ADFC = 10 . 23 . sin 71° 8′ = 217,65

Overfladen = 1448,76 Kvf.

I △ ABC findes ∠ A = 98° 47′ 50″.

I Hjørnet A, hvis Sider ere bekjendte, findes

Vinklen ved AB = 62° 9′ 52″

og Vinklen ved AC = 54° 3′ 14″.

Rumfanget er da

enten = 2 . ABC . 23 sin 60° 2′ . sin 62° 9′ 52″

eller = 2 . ABC . 23 sin 71° 8′ . sin 54° 3′ 14″,

og findes = 2960,1 Kubf.

III.

Af 2 Differensrækker har den ene første Led = 25, sidste Led = 37, den anden første Led = 43, sidste Led = 63; lægges deres Summer sammen, udkommer der 800. Bestem Rækkerne.

Opløsning. $31n + 53n_1 = 800$

giver $n = 7, \; n_1 = 11.$

$$d = \frac{u - a}{n - 1} = 2; \quad d_1 = \frac{u_1 - a_1}{n_1 - 1} = 2.$$

IV.

I en ret cirkulær Kegle er Radius i Grundfladen = 12 Fod og den halve Toppunktsvinkel = 26°. Et Punkt, der ligger i Keglens Højde i en Afstand = 5 Fod fra Grund-

fladen, tages til Centrum for en Kugleflade, der gaaer gjennem Grundfladens Omkreds. Find Rumfanget af den Del af Kuglen, der ligger udenfor Keglen.

Opløsning. Radius i Kuglen = 13 Fod.

Kuglesegmentet $= \pi \cdot 64 (13 - \frac{8}{3}) = 2077{,}6$ Kubf.

Kugleringen $= \frac{\pi}{6} hk^2 = 3494$ Kubf.,

idet Afstanden fra Keglens Toppunkt til Kuglens Centrum

$$m = 12 \cot 26^0 - 5 = 19{,}604,$$

og $\angle$ x mellem k og Radius til dens Endepunkt er bestemt ved

$$\sin x = \frac{m \sin 26^0}{13}, \quad x = 41^0\,22'\,56'',$$

saa at $\qquad k = 2 \cdot 13 \cos 41^0\,22'\,56'' = 19{,}51,$

og $\qquad h = 13 \cos (41^0\,22'\,56'' - 26^0) + 5 = 17{,}534.$

Det søgte Rumfang er $= 5571{,}6$ Kubf.

Afgangsexamen for studerende.

(Juni 1891.)

Arithmetik.

1. Hvilken Ligning maa finde Sted mellem Koefficienterne i Ligningen

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

naar den ene Rod skal være Mellemproportional mellem de to andre?

Idet denne Betingelse tænkes opfyldt, søges Rødderne udtrykte ved a og c.

Opløsning. Mellem Ligningerne

$$\alpha + \beta + \gamma = -a \qquad (1)$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b \qquad (2)$$

$$\alpha\beta\gamma = -c$$

$$\gamma^2 = \alpha\beta$$

elimineres α, β og γ.

En saadan Bues Skæringspunkt med den givne Cirkel er B. Trekanten tegnes nu let. Der kan blive 8 Løsninger.

Beregningsopgave.

En Trekants Sider have Længderne

47,2351; 19,8604; 35,9007.

Beregn Vinklerne og Siderne i den Trekant, der har sine Vinkelspidser i Centrerne til den givne Trekants udvendige Røringscirkler.

Opløsning. Kaldes Vinklerne i den givne Trekant A, B, C, i den søgte α, β, γ, har man $\alpha = 90 - \frac{A}{2}$ og de analoge; man har da $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \cot\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ og de analoge og kan beregne α, β og γ. Man finder

$$\alpha = 33^0 42' 11''$$
$$\beta = 78^0 34' 44''$$
$$\gamma = 67^0 43' 2''.$$

Projektionen af den søgte Side $\beta\gamma$ paa AB eller AC er a; man faar derved $\beta\gamma = \frac{2}{\sin\frac{A}{2}} = a \sec\alpha$, o. s. v. Indsættes Værdierne, faar man

$$\beta\gamma = 56{,}778$$
$$\gamma\alpha = 100{,}3$$
$$\alpha\beta = 94{,}68.$$

Projektionstegning.

Tegn Projektionerne af en Tærning, som har en Hjørnespids liggende i den vandrette Projektionsplan, medens den derfra udgaaende Diagonal hverken er lodret paa eller parallel med nogen af Projektionsplanerne. Tegn r

Sporene af en Plan, vinkelret paa Midten af denne Diagonal, Projektionerne af Planens Skæringslinie med Tærningens Overflade og endelig Skæringslinien i sånd Størrelse. Planen tænkes ikke gennemsigtig.

Almindelig Forberedelsesexamen.

(Juni 1891.)

Aritmetik.

1. Beregn $x = \sqrt[5]{\log 0{,}274308}$.

2. Reducer Udtrykket

$$\sqrt{50\sqrt{50}} - 3\sqrt[3]{4\sqrt{32}} + \sqrt{8}$$

og beregn Værdien saaledes, at Fejlen er mindre end $\frac{1}{37}$.

3. En Arv paa 56000 Kr. deles mellem 11 Sødskende saaledes, at alle Søstrene tilsammen faa lige saa meget som alle Brødrene, og enhver af Søstrene faar 3000 Kr. mere end enhver af Brødrene. Hvor mange Søstre og hvor mange Brødre er der?

Opløsning. 1. $x = -\sqrt[5]{0{,}56176}$

$\log(-x) = 0{,}94991 - 1,$

$x = -0{,}89106.$

2. $\sqrt[3]{50\sqrt{50}} = \sqrt[3]{\sqrt{50^3}} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$

$\sqrt[3]{4\sqrt{32}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^9}} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}.$

Udtrykket $= 5\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = \sqrt{2},$

beregnes med **Fejlgrænsen** $\frac{1}{37}$ saaledes:

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2738}}{37},$$

3. Antages der at være x Søstre, 11 — x Brødre, en Broderpart y Kr., en Søsterpart (y + 3000) Kr., er ifølge Opgaven

$$xy + 3000x = 11y - xy$$
$$3000x + 11y = 56000,$$

der ved Elimination af y giver

$$x^2 - \frac{178}{6}x + \frac{616}{6} = 0,$$

hvoraf x = 4 (den anden Værdi ubrugelig).

Der er saaledes 4 Søstre (à 7000 Kr.) og 7 Brødre (à 4000 Kr.)

Geometri.

1. En ligesidet Trekant er indskreven i en Cirkel med Radius r, og om en af Vinkelspidserne som Centrum er tegnet en Cirkelbue gennem de to andre. Find Arealerne af de 5 Dele, hvori Cirklens Areal er delt.

2. Skæringspunktet mellem Siden BC i en Trekant ABC og Vinkel A's Halveringslinie betegnes ved D; gennem D trækkes Linier parallele med AB og AC. Bevis, at den derved fremkomne Firkant er en Rhombe, og find Længden af dennes Side, naar AB = c og AC = b.

3. Konstruer et Parallelogram, naar een af dets Vinkler og bægge Diagonalerne ere givne.

Opløsning. 1. Trekanten $= \frac{3r^2\sqrt{3}}{4} = 1{,}299r^2$.

Afsnittene i Cirklen r hver $= \frac{r^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{12} = 0{,}614r^2$.

Afsnittet i Cirklen $r\sqrt{3}$ er $= \frac{r^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{4} = 0{,}272r^2$.

Differensen mellem Afsnittene $= \frac{r^2(3\sqrt{3} - \pi)}{6} = 0{,}342r^2$.

2. Da AD deler det fremkomne Parallelogram i to ligebenede Trekanter, ere alle Siderne i det ligestore, det er en Rhombe. Kaldes dens Side x, er ifølge Sætningen om Paralleltransversaler

$$\frac{x}{c} = \frac{b-x}{b} = \frac{b}{b+c},$$

$$x = \frac{bc}{b+c}.$$

3. Det antages at være en spids Vinkel, C, der er opgiven. Man afsætter da den mindste Diagonal BD, tegner over den en Bue, der rummer $\angle$ C og skærer denne Bue med en Cirkel, der har BD's Midtpunkt O til Centrum og $OC = \frac{AC}{2}$ til Radius. CO forlænges til A, idet OA = OC. Man maa have OC $\leqq$ Linien fra O gennem Buen BCD's Centrum ud til Buen. Der faaes da 1 Løsning (2 kongruente).

Praktisk Regning.

1. En Vinhandler køber et Parti Vin i Bordeaux. Told og Fragt til København beløber sig til 5 p. Ct. af Indkøbsprisen. Vinen tappes paa Trepægleflasker til 7 Øre Stykket; de øvrige Omkostninger ved Aftapningen udgøre 6 Øre pr. Flaske. Vinhandleren sælger Vinen (med Flaske) for 2 Kr. 60 Øre pr. Flaske og tjener derved 62 p. Ct. paa sine samlede Udgifter. Hvor mange fr. og ct. har han givet for en Liter Vin i Bordeaux?

1 fr. = 100 ct. = 72 Øre; 1 Liter = 4 Pægle.

2. En Flaske, hvis Tykkelse vi se bort fra, har Form af en ret Cylinder, fra hvis Bund en Kegle med samme Grundflade stikker op i Cylindren, hvis Højde er 4 Gange Keglens. Flaskens Omkreds er 10 Tommer; hvor stor er dens Højde, naar den fyldt rummer 25 ℔ K[illegible]

1 Kubikfod Vand vejer [illegible] tfylde

$= 13{,}6$; en Cylinders Volumen er $\pi h r^2$, en Kegles $\frac{1}{3}\pi h r^2$, naar h betyder Højden, r Grundfladens Radius.

Opløsning. 1. 1 Liter $=$ x fr.

$$1 \text{ Flaske} = \frac{3x}{4} \text{ fr.} = 54x \text{ Øre.}$$

$$\left(54x \cdot \frac{105}{100} + 13\right) \cdot \frac{162}{100} = 260,$$

hvoraf

$$x = 2{,}60.$$

2. $2\pi r = 10, \; r = \frac{5}{\pi}.$

$$61{,}83 \cdot 13{,}6 \text{ ℔ Kvægs.} = 1728 \text{ Kubt.}$$

$$25 \text{ ℔ Kvægs.} = \frac{1728 \cdot 25}{61{,}83 \cdot 13{,}6} \text{ Kubt.}$$

$$= \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{h}{4}, \text{ saa at}$$

$$h = \frac{1728 \cdot 12 \cdot \pi}{61{,}83 \cdot 13{,}6 \cdot 11}.$$

$$\log h = 0{,}84774; \; h = 7{,}0427 \text{ Tommer.}$$

Løste Opgaver.

75. At bestemme et trecifret Tal med Tværsummen 14, som ved Division med 70 giver Resten 3.

Opløsning. Er Tallets Cifre x, y og z, har man umiddelbart $z = 3$.

$$x + y = 14 - 3 = 11; \quad \text{(I)}$$

$$y = 11 - x.$$

$$100x + 10y + z - 3 \equiv 0 \text{ mod. } 70; \quad \text{(II)}$$

$$10x + y \equiv 0 \text{ mod. } 7.$$

Indsættes Værdien af (I) for y, faas

$$9x + 11 \equiv 0 \text{ mod. } 7.$$

11 giver ved Division med 7 Resten + 4; altsaa maa 9x give Resten — 4 (det ses let at 9x ikke kan give Resten 3). 9 giver Resten + 2, altsaa x Resten — 2; x = 5; y = 6; z = 3.

Tallet = 563.

76. At bestemme de trecifrede Tal, som ere saaledes beskafne, at Tallet er lig Summen af de 6 tocifrede Tal, der fremkomme ved at kombinere to af det ubekendte Tals Ciffre paa alle mulige Maader.

Opløsning.

$$100x + 10y + z$$
$$= 10x + y + 10x + z + 10y + x + 10y + z$$
$$+ 10z + x + 10z + y$$
$$= 22(x + y + z).$$

Da Tallet altsaa er deleligt med 11, har man

$$x + z = \begin{cases} y \\ y + 11. \end{cases}$$

Indsættes x + z for y i Ligningen, faar man 2x = z. Forholdet mellem Tallets Cifre er da = 1 : 3 : 2; Tallet = 132, 264 eller 396.

Antagelsen x + z = y + 11 fører til en Absurditet.

77. At bestemme det mindste hele Tal, der er 4 Gange saa stort som Produktet af sine Ciffre.

Opløsning. Skal et tocifret Tal a + 10b være = 4ab, maa altsaa $a = \frac{10b}{4b - 1}$, saa at 4b maa ende paa 6, b = 4 eller 9, men begge disse gøre a bruden.

Betragtes dernæst et trecifret Tal og sættes

$$a + 10b + 100c = 4abc,$$

faar man
$$c = \frac{a + 10b}{4ab - 100},$$

eller idet a sættes = 2p, p ≤ 4,

$$c = \frac{p + 5b}{4pb - 50},$$

saa at pb > 13, hvoraf p > 2. Sættes p = 2, faas

$$c = \frac{2 + 5b}{8b - 50},$$

b > 7 og lige, altsaa b = 8, der kan bruges, da man faar c = 3. Andre Værdier af p og b findes ikke. Det eneste trecifrede Tal og altsaa det mindste, der opfylder Betingelsen er da 384.

78. At bestemme et trecifret Tal saaledes, at det dobbelte af Tallet er lig Antallet af Ciffre i alle de hele Tal, der ikke ere større end det søgte Tal.

Opløsning. $9.1 + 90.2 + (x - 99)3 = 2x;$

$$x = 108.$$

79. At bestemme de retvinklede Trekanter, hvis Sider ere hele Tal, hvor det Tal, der repræsenterer Perimeteren, ¹) enten er lig det Tal, der udtrykker Arealet, ²) eller dobbelt saa stort som Arealtallet.

Opløsning. Betegnes Siderne ved h, a og b, og sættes $h = x^2 + y^2$, $a = x^2 - y^2$ og $b = 2xy$, haves

¹) $2x^2 + 2xy = xy(x^2 - y^2),$

$$2 = xy - y^2,$$

$$x = \frac{2}{y} + y.$$

For at x og y skal være hele Tal, maa y da være = 1 eller 2, og x bliver i begge Tilfælde = 3; altsaa haves

$h = 10,\ a = 8,\ b = 6$

eller $h = 13,\ a = 5,\ b = 12$

²) $2x^2 + 2xy = 2xy(x^2 - y^2),$

$$x = \frac{1}{y} + y.$$

Der haves da kun Løsningen $y = 1$, $x = 2$, hvortil svarer $h = 5,\ a = 3,\ b = 4.$

81. Bevis at $n^{13} - n$ er deleligt

et vilkaarligt helt Tal.

Opløsning. $n^{13} - n$ kan opløses i $(n - 1)\,n\,(n + 1)$ $(n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)(n^2 + 1)(n^4 - n^2 + 1)$. 2730 opløses i $2 . 3 . 5 . 7 . 13$. Da Størrelsens første 3 Faktorer ere 3 consecutive Tal, vil 2 og 3 gaa op i deres Produkt. Gaar 5 ikke op i n, kan det give Resterne 1, 2, 3 og 4. I første Tilfælde gaar det op i $n - 1$, i andet og tredje i $n^2 + 1$, i fjerde i $n + 1$. Paa samme Maade vises, at Tallet er deleligt med 7. Endelig er det ifølge Fermats Sætning deleligt med 13.

(Opgaverne 75, 76, 78, 79 og 81 løste af J. Byskov.)
(75, 76, 78 og 81 ere ogsaa løste af — d. — d.)

Opgaver til Løsning.

86. En qvadrat ABCD är gifven. Drag från A en rät linie AEF, som skär sidan CD i E och förlängningen af sidan BC i F så, att stycket EF blir af gifven längd.

87. Lös eqvationen

$$x^4 - 2x^3 + x - a = 0.$$

(86 og 87 af Theodor Ney.)

88. Bestem Forholdet mellem Katheterne i en retvinklet Trekant, naar den indskrevne Cirkel gaar gjennem Medianernes Skæringspunkt.

89. ABC er en vilkaarlig Trekant. Konstruer 3 rette Linier AA_1, BB_1 og CC_1, gaaende gjennem samme Punkt O, saaledes at Firkanterne AB_1OC_1, BC_1OA_1 og CA_1OB_1 blive omskrivelige.

90. I en Firkant med Siderne a, b, c og d, som baade er ind- og omskrivelig, t [illegible] nalerne. I de fire smaa

Trekanter, hvori Firkanten herved deles, indskrives Cirkler. Betegnes Radius i den Cirkel, som rører Siden a ved r_a, skal man bevise, at

$$c \cdot r_a = d \cdot r_b = a \cdot r_c = b \cdot r_d.$$

91. En Firkant ABCD er baade ind- og omskrivelig. O er Centrum for den indskrevne Cirkel, Firkantens Sider ere a, b, c og d, og s er den halve Perimeter.

Vis at

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 = \frac{(ab + cd)^2 + (ad + bc)^2}{s^2}.$$

92. Opløs Ligningen

$$\sqrt{(x - a)^2 + (x - b)^2} + \sqrt{(x - c)^2 + (x - d)^2}$$
$$= \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}.$$

(88—92 af **A. S. Bang.**)

Korrespondance.

Spørgsmaal: Hvorledes løses Opgave Nr. 357 i Jul. Petersens geometriske Opgaver til Skolebrug, 3dje Udgave?

Bsk.

Svar: Skæringspunktet mellem Cirklerne A og B kaldes T, mellem Cirklerne A og C S og mellem Cirklerne B og C R. Da $\angle$ OBA $=$ $\angle$ OCA bliver $\smile$ OT i Cirklen B i Grademaal $=$ $\smile$ OS i Cirklen C, altsaa $\angle$ ORT $=$ $\angle$ ORS, hvorved Sætningen er bevist.

Norske Examensopgaver.

Examen Artium.

(Maj 1891).

(Løsningerne ved O. B.)

A. Klassisk Artium.

I. Hvad forstaaes ved en potens for de tilfælde, at exponenten er et helt tal eller en brøk, positiv eller negativ? Anfør og bevis sætningen om at ophøie et produkt til en potens for alle de nævnte værdier af exponenten.

II. En regulær sekskant dreier sig om en af siderne. Det fremkomne omdreiningslegeme har samme kubikindhold som en kugle, hvis radius er 3 m. Find sekskantens side.

Opløsning. Kaldes sekskantens side s, mindste radius q og kuglens radius r, har man:

Omdreiningslegemet

$$= 4q^2\pi s + 2\frac{\pi \cdot \frac{s}{2}}{3}(4q^2 + 2q \cdot q + q^2) - 2sq^2 \cdot \frac{s}{2}$$

$$= \frac{9}{2}\pi s^3.$$

Nu skal man have:

$$\frac{9}{2}\pi s^3 = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

hvoraf $s = 2\text{m}.$

III. Beregn de 3 høider i et triangel ABC, hvori er givet siderne:

$$AB = 6.8649 \text{ cm.}$$
$$BC = 9.2582 \text{ »}$$
$$AC = 8.1783 \text{ »}$$

Opløsning:

Af formlerne for $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ o. s. v. findes:

$$\angle A = 75^0\,24{,}2'$$
$$\angle B = 58^0\,44{,}6'$$
$$\angle C = 45^0\,51{,}2'$$

Dernæst findes høiderne af formlerne

$$h_a = AC \sin B \text{ o. s. v.}$$
$$h_a = 5{,}8684 \text{ cm.}$$
$$h_b = 6{,}6433 \text{ cm.}$$
$$h_c = 7{,}9144 \text{ cm.}$$

B. Realartium.

1. Hvorledes multipliceres to konvergerende rækker? I hvilket tilfælde er multiplikationen tilladt? Sætningens rigtighed bevises.

2. En ret kegles fuldstændige overflade (sidefladen + grundfladen) er k gange saa stor som den indskrevne kugles overflade.

Find sinus til vinkelen mellem axen og siden. Beregn dernæst antallet af grader i buen til den cirkelsektor, som erholdes ved at udfolde sidefladen.

Opløsning. Kaldes keglens grundflades radius R, dens sidekant B, vinkelen mellem aksen og sidekanten x og gradtallet for den i opg. nævnte bue y, har man:

$$\pi R^2 + \pi RB = k \,.\, 4\pi r^2 = 4\pi k \,.\, \frac{(B - R)^2 \,.\, R^2}{B^2 - R^2},$$

hvoraf
$$(B + R)^2 = 4kR(B - R)$$
$$\sin x = \frac{R}{B} = \frac{2k - 1 \pm \sqrt{k^2 - 2k}}{4k + 1}.$$

Af
$$2\pi R : 2\pi B = y : 360, \text{ følger:}$$
$$y = 360 \,.\, \frac{R}{B} = 360 \,.\, \sin x.$$

3. Bestem ligningen for den ellipse, der gaar gjennem punktet (12 . 4), og hvis store axe er dobbelt saa stor som den lille, naar dens centrum skal ligge i origo, og den store axe falder langs abscisseaxen.

Find ligningen for normalen, der gaar gjennem det givne punkt; beregn længden for den korde, som ellipsen afskjærer af denne normal.

Opløsning.

Af $a = 2b$ og $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ findes ved indsætning af $x = 12$, $y = 4$: $a = 4 . \sqrt{13}$, $b = 2 . \sqrt{13}$.

Ellipsens ligning bliver altsaa: $\frac{x^2}{208} + \frac{y^2}{52} = 1$

Normalens ligning: $y - y^1 = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y^1}{x^1} (x - x^1)$ faar formen:

$$y = \frac{4}{3} x - 12,$$

der indsat i ellipsens ligning gir koordinaterne for normalens 2det skjæringspunkt med ellipsen:

$$x = \frac{276}{73}, \quad y = -\frac{508}{73}$$

Kaldes de stykker af den søgte korde, der ligger mellem den store akse og ellipsen m og n, har man:

$$\text{Korden} = m + n = \sqrt{3^2 + 4^2} + \sqrt{9^2 + \left(\frac{508}{73}\right)^2}$$

$$= 5 + 11,4 = 16,4.$$

Middelskoleexamen for gutter.

(Juni 1891).

I. En mand kjøber fra Danmark 75 snes æg efter en pris af kr. 0,70 pr. snes. Fragt og andre udgifter beløber sig til kr. 3,50.

Ved ankomsten viser det sig, at 10 snes er knust, saa de ikke kan sælges. Af resten sælges $12^1/_2$ snes, der ser mindre godt ud, for kr. 0,80 pr. snes, medens de øvrige, der er friske, sælges efter vægt.

Til hvilken pris pr. kilogram sælger kjøbmanden de sidste, naar han ialt har en fortjeneste af $16^6/_7$ pct. af sit havte udlæg, og naar 20 snes af de friske æg veier 22 klgr.?

Opløsning.

$75 \cdot 0,70 = 52,50$

$+ \ 3,50$

$$\frac{8 \cdot 56 \cdot 118}{100 \cdot 7} = \begin{array}{r} 56{,}00 \\ 9{,}44 \\ \hline 65{,}44 \end{array}$$

$$-\,12{,}5 \cdot 0{,}80 = \begin{array}{r} 10{,}00 \\ \hline 55{,}44 \end{array}$$

1 snes = $\frac{22}{20}$ = 1,1 kg.
52,5 . 1,1 = 57,75 kg.

$$55{,}44 : 57{,}75 = 0{,}96 \text{ kr. pr. kg.}$$

II. Man har en guldlegering, der veier 50 gram og er af finheden 784 (det vil sige, at 1000 gram legering eller metalblanding indeholder 784 gram rent guld). Ved tilsætning af rent guld ønsker man at lave en legering af finheden 800. Hvormeget rent guld maa tilsættes?

Opløsning.

$$\frac{784 \cdot 50}{1000} + x = \frac{800 \cdot (50 + x)}{1000}$$

$$x = 4 \text{ gr.}$$

III. Fladeindholdet af et cirkelsegment, hvis bue indeholder 60^0, er 3,27 m^2 stort. Beregn cirkelens radius med saa stor nøiagtighed, at feilen bliver mindre end en halv decimeter. — Hvis logarithmer ikke benyttes, sættes $\pi = 3{,}14$.

Opløsning.

$$\frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 3{,}27$$

$$r^2 = 36\tfrac{1}{3}$$

$$r = 6{,}03 \text{ m.}$$

IV. Konstruer et retvinklet triangel, hvis hypotenus er 8 cm., og hvori perpendikulæren fra den rette vinkels toppunkt paa hypotenusen er 3 cm. Konstruer derpaa (uden hjælp af beregning) et med samme ligedannet triangel, hvori høiden paa hypotenusen er 5 cm. Vis tilsidst, hvorledes hypotenusen i det sidste triangel ogsaa kan findes ved beregning.

Opløsning.

$$8 : x = 3 : 5$$

$$x = 13\tfrac{1}{3} \text{ cm.}$$

Danske Examensopgaver.

Afgangsexamen fra Officersskolens yngste Klasse.

(September 1891.)

(Løsningerne ved J. R.)

Almindelig Prøve. I.

1. Find x, y og z af Ligningerne:

$$xy - xz + yz = (a + b + c)\,xyz$$

$$\frac{xy - xz}{a} = \frac{-xz + yz}{b} = \frac{yz + xy}{c}.$$

De fundne Udtryk skal dernæst beregnes, naar

$$a = \log_8 \frac{1}{4},\quad b = \log_9 27 \text{ og } c = \log_d \frac{1}{d\sqrt{d}}.$$

Opløsning.

$$xy - xz + yz = (a + b + c)\,xyz \qquad (1)$$

$$\frac{xy - xz}{a} = \frac{-xz + yz}{b} = \frac{yz + xy}{c} = \frac{2xy}{a + c - b}$$

$$= \frac{2xz}{c - a - b} = \frac{2yz}{c - a + b}.$$

Af det første og sjette af disse Forhold findes $xy - xz = \frac{a \cdot 2yz}{c - a + b}$, der indsættes i (1), som dernæst divideres med yz; herved faaes:

$$x = \frac{1}{-a + b + c} \text{ eller } yz = 0;$$

paa lignende Maade finder man:

$$y = \frac{1}{-a - b + c} \text{ og } z = \frac{1}{a - b + c},$$

eller ogsaa $\qquad x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

Da $\log_{2^3} 2^{-2} = -\frac{2}{3}$, $\log_{3^2} 3^3 = \frac{3}{2}$ og $\log_d d^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}$, er $a = -\frac{2}{3}$, $b = \frac{3}{2}$ og $c = -\frac{3}{2}$.

Indsættes disse Værdier i Udtrykkene for x, y og z faas $x = \frac{3}{2}$, $y = -\frac{3}{7}$ og $z = -\frac{3}{8}$.

2. Siderne i en 3-Kant ere $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2+c^2}$, $\sqrt{b^2+c^2}$. Find Arealet. Det fundne Udtryk beregnes for $a = 1,2345$, $b = \log a$ og $c = \log b$.

Opløsning.

Ved at anvende Formlen $T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ faas efter nogen Reduktion

$$T = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}.$$

Heri skal altsaa indsættes

$a = 1,2345$, $b = \log a = 0,09149(5)$; $2\log a = 0,18299$
$c = \log b = 0,96139(5) - 2$; $2\log b = 0,92279 - 3$
$c = -1,03860$; $c^2 = 1,03860^2$; $2\log c = 0,03290$.

$\log(a^2b^2) = 0,10578 - 2$; $a^2b^2 = 0,01276$
$\log(a^2c^2) = 0,21589$; $a^2c^2 = 1,64396$
$\log(b^2c^2) = 0,95569 - 3$; $b^2c^2 = 0,00903$

$1,66575$

$$\log T = \frac{1}{2}\log 1,66575 - \log 2 = 0,80977 - 1.$$
$$T = 0,64531.$$

Almindelig Prøve II.

1. Givet △ ABC. Paa Forlængelserne af AB afsættes AE = AC og BD = BC. Viis at Centret O til den Cirkel, som omskriver △ CDE, ogsaa er Centrum for den Cirkel liggende i ∠ C, som rører △ ABC udvendig. Hvorledes maa AE og BD afsættes, naar O skal være Centrum 1) for den i △ ABC indskrevne Cirkel, 2) for den Cirkel, som rører △ ABC udvendig og ligger i ∠ A.

Opløsning. Afsættes AE i Retningen BA og CE i Retningen AB, fremkommer △ CDE; da △ CAE er ligebenet, falde den vinkelrette paa Midten af EC og ∠ CAE's Halveringslinie sammen; paa samme Maade blive den vinkel-

rette paa Midten af CD sammenfaldende med $\angle$ CBD's Halveringslinie. Altsaa er Cirklen, der omskriver $\triangle$ CDE koncentrisk med den Cirkel, der liggende i $\angle$ C rører $\triangle$ ABC udvendig.

Afsættes derimod AE = AE_1 i Retningen AB og BD_1 = BD i Retningen BA bliver $\triangle$ CAE_1 ligebenet, saa at den vinkelrette paa Midten af CE_1 halverer $\angle$ CAE_1; endvidere er $\triangle$ CBD_1 ligebenet og altsaa $\angle$ CBD_1's Halveringslinie sammenfaldende med den vinkelrette paa Midten af CD_1, saa at $\triangle$ ABC's indskrevne og $\triangle$ D_1CE_1's omskrevne Cirkel ogsaa blive koncentriske.

Tilbage staar at bevise, at $\triangle$ CDE_1's omskrevne Cirkel har samme Centrum Q som den Cirkel, der liggende i $\angle$ A rører $\triangle$ ABC udvendig. Det ene geometriske Sted for ethvert af de to Centrer er $\angle$ CAB's Halveringslinie, der staar vinkelret paa Midten af CE_1. Antages den Vinkelrette fra Q paa AB's Forlængelse at træffe denne i P, behøver man blot at vise, at P er Midtpunktet af E_1D.

$AP = s$; men $\frac{AE_1 + AD}{2}$ er ogsaa $= s$, da $AE_1 = b$ og $AD = c + a$.

2. AB og CD ere 2 paa hinanden vinkelrette Diametre i en Cirkel med Centrum O og Radius r. Linien DF skjærer OB i E og Cirklen i F saaledes, at EF = EO. Viis at DF er 3-Kantsiden. Find AF og BF.

Opløsning. Trækkes CE og CF, ser man let, at Trekanterne COE og CFE ere kongruente; altsaa er CF = r og $DF = \sqrt{4r^2 - r^2} = r\sqrt{3} = k_3$.

Den vinkelrette FG paa AB er $\frac{r}{2}$ og $OG = \frac{r}{2}\sqrt{3}$

$$AF = \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(r + \frac{r}{2}\sqrt{3}\right)^2} = r\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$FB = \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(r - \frac{r}{2}\sqrt{3}\right)^2} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}} = k_{12}$$

Tilkægsprøve I.

1. I et 3-sidet Prisme forbindes hver Spids i den ene Grundflade med Midtpunktet af den modstaaende Kant i den anden Grudflade. — Viis at de 3 Linier skjære hverandre i samme Punkt O, at O ligger paa Linien, der forbinder Tyngdepunkterne i de 2 Grundflader. — Er nu Prismet ret, dets Grundflade G og Sidekant h, skal man finde Prismets Volumen ved Summen af de 5 Pyramider, der have O til Toppunkt og Prismets Vægge til Grundflader.

Opløsning. Betegnes Prismets Kanter ved Aa, Bb og Cc samt Midtpunktet af ac ved γ, Midtpunktet af cb ved β og Midtpunktet af ab ved α, skal det altsaa bevises, at $A\beta$, $B\gamma$ og $C\alpha$ skjære hverandre i Punktet O.
Da $\gamma\beta \neq ab \neq AB$ skjære $A\beta$ og $B\gamma$ hinanden, og da endvidere $\gamma\beta \simeq \frac{1}{2} ab$ er $\triangle \gamma O \beta \sim BOA$ i Forholdet 1 : 2, altsaa $\beta O = \frac{1}{2} OA$ og $\gamma O = \frac{1}{2} OB$.

Paa samme Maade indsees, at $A\beta$ og $C\alpha$ ligge i det ved de parallele Linier $\alpha\beta$ og AC bestemte Plan og at deres Skjæringspunkt deler enhver af dem i 2 Stykker, der forholde sig som 1 : 2. De tre Linier maa derfor skjære hverandre i samme Punkt O.

Betegner β_1 Midtpunktet af CB og γ_1 Midtpunktet af AC, ser man let, at $\beta\beta_1 \neq \gamma\gamma_1 \neq Cc \neq Bb \neq Aa$. Planen $Aa\beta$ gaar altsaa gjennem β_1, skjærer begge Grundfladerne efter en Median og indeholder Punktet O (da det ligger paa $A\beta$); af samme Grund gaar Planen $Bb\gamma$ gjennem γ_1 og O og skjærer de to Grundflader efter en anden Median. Grundfladernes Tyngdepunkter og O ligge altsaa i begge de nævnte Planer og følgelig i deres Skjæringslinie.

O har Afstanden $\frac{2}{3}$h fra ABC og $\frac{1}{3}$h fra abc; de to tilsvarende Pyramiders Volumina ere $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} h \cdot G = \frac{2}{9} hG$ og $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} h \cdot G = \frac{1}{9} hG$, deres Sum altsaa $\frac{1}{3}$hG; det gjælder derfor om at vise, at Summen af de tre andre Pyramiders Volumina er $\frac{2}{3}$hG.

Fældes nu fra Grundfladen ABC's Tyngdepunkt Linierne p, q og r vinkelrette henholdsvis paa AB, BC og AC, blive disse 3 Vinkelrette Højderne i de 3 Pyramider.

Summen af de 3 Pyramiders Volumina er:

$$h . AB . \frac{p}{3} + h . BC . \frac{q}{3} + h . AC . \frac{r}{3}$$
$$= \frac{h}{3} (AB . p + BC . q + AC . r);$$

men Faktoren til $\frac{h}{3}$ er netop 2 G.

2. Paa Hyperblen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ med Toppunkterne A og A_1 er $M:(x_1, y_1)$ et vilkaarligt Punkt. Linien A_1M skjæres af Linierne igjennem A parallele med Asymptoterne i Punkterne P og Q. Viis at M er Midtpunktet i PQ.

Opløsning.

Linien AP har Ligningen $y = \frac{b}{a}(x + a)$ (1)

— AQ — $y = -\frac{b}{a}(x + a)$ (2)

— A_1M — $y = \frac{y_1}{x_1 - a}(x - a)$ (3)

Det vil være simplest at vise, at Projektionerne af QM og MP paa Abscisseaxen ere ligestore. Betegnes Q's Abscisse ved x_2 og P's ved x_3, skal man altsaa blot bevise, at

$$\frac{x_2 + x_3}{2} = x_1 \quad (4)$$

Elimineres y af (3) og (2) finder man $x_2 = \frac{abx_1 - a^2y_1 - a^2b}{ab - bx_1 - ay_1}$

— y af (3) og (1) — $x_3 = \frac{a^2b - ay_1 - abx_1}{bx_1 - ab - ay_1}$.

Indsættes disse Værdier i (4) og benyttes Kurvens Ligning, reduceres venstre Side til x_1.

Tillægsprøve II.

1. I △ABC kjendes ∠A, Siden a og Ra indskrevne Cirkel. Man skal udvikle Form

af Vinklerne B og C, samt angive Betingelserne for Opgavens Mulighed.

Opløsning.

Af Formlen $r = \frac{a \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$ faas: $a \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} = r \cos\frac{A}{2}$,

altsaa $2 \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} = \frac{2r}{a} \cos\frac{A}{2} = \cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2}$.

$$\frac{B+C}{2} = 90^0 - \frac{A}{2} \qquad (1)$$

altsaa $$\cos\frac{B+C}{2} = \sin\frac{A}{2},$$

der indsat giver

$$\cos\frac{B-C}{2} = \sin\frac{A}{2} + \frac{2r}{a}\cos\frac{A}{2}. \qquad (2)$$

Af (1) og (2) findes B og C.

Diskussion. $0 < \cos\frac{B-C}{2} \leq 1$. Den første Betingelse er opfyldt; den anden giver

$$\sin\frac{A}{2} + \frac{2r}{a}\cos\frac{A}{2} \leq 1$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \frac{2r}{a} \leq \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}},$$

$$\frac{4r}{a}\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \frac{4r^2}{a^2} \leq 1,$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} \leq \frac{a^2 - 4r^2}{4ar}.$$

2. Givet Punkterne $A : (a, b)$ og $B : (a_1, b_1)$ samt Cirklen $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$. Toppunktet C af $\triangle$ ABC flytter sig paa Cirklen. Find Stedet for Trekantens Tyngdepunkt.

Opløsning. Ethvert Punkt af det søgte geometriske Sted har fra Midtpunktet D af AB en Afstand $= \frac{1}{3}$ DC; det maa derfor være en Cirkel ligedannet med den givne i Forholdet $1 : 3$ og ligedan beliggende med denne med D som Fællespunkt.

Cirklens Centrum bliver $\left(\frac{a + a_1 + m}{3}, \frac{b + b_1 + n}{3}\right)$ og dens Radius $\frac{r}{3}$, saa at dens Ligning bliver

$$\left(x - \frac{a + a_1 + m}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{b + b_1 + n}{3}\right)^2 = \left(\frac{r}{3}\right)^2.$$

Adgangsexamen til polyteknisk Læreanstalt.

(Juni 1891.)

I.

1. Paa en ret Linie ligge fire Punkter A, B, P, Q. Man skal paa Linien finde et Punkt x saaledes, at

$$\frac{Ax}{Bx} = \frac{Px}{Qx}.$$

Opløsning. Over AQ og BP som Korder tegnes to vilkaarlige Cirkler, der skære hinanden i M og N; MN skærer da den givne Linie i Punktet a; thi man har:

$$Ax \,.\, Qx = Mx \,.\, Nx = Px \,.\, Bx, \text{ eller } \frac{Ax}{Bx} = \frac{Px}{Qx}.$$

2. Givet en Trekant ABC. Paa AB ligge to givne Punkter P og Q. Tegn en ny Trekant abc; a skal ligge paa BC, b paa AC, ab skal være parallel med AB, bc skal gaa gjennem P, ac gjennem Q, og Siderne ac og bc skulle staa i et givet Forhold til hinanden.

Opløsning. Opgaven tænkes løst. Trækkes Cc, som skærer AB i x og ab i D, har man:

$$\frac{Px}{Qx} = \frac{bD}{aD} = \frac{Ax}{Bx}.$$

Man ser heraf, at x er et fast Punkt, som bestemmes [...] Cx er da et geometrisk Sted for c; et andet faaes [...]rholdscirklen for Q og P i det givne Forhold.

af Vinklerne B og C, samt angive Betingelserne for Op… Mulighed.

Opløsning.

Af Formlen $r = \dfrac{a \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$ faas: $a \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}$ …

altsaa $2 \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} = \frac{2r}{a} \cos\frac{A}{2} = \cos\frac{B-C}{2}$ …

$$\frac{B+C}{2} = 90^0 - \frac{A}{2}$$

altsaa $$\cos\frac{B+C}{2} = \sin\frac{A}{2},$$

der indsat giver

$$\cos\frac{B-C}{2} = \sin\frac{A}{2} + \frac{2r}{a} c…$$

Af (1) og (2) findes B og C.

Diskussion. $0 < \cos\frac{B-C}{2} \leq 1$

gelse er opfyldt; den anden giver

$$\sin\frac{A}{2} + \frac{2r}{a} \cos\frac{A}{2}$$

$$tg\frac{A}{2} + \frac{2r}{a} \leq \sqrt{1 + …}$$

$$\frac{4r}{a} tg\frac{A}{2} + \frac{4r^2}{a^2} < …$$

$$tg\frac{A}{2} \leq \frac{a^2 - 4…}{4ar}$$

2. Givet Punkterne A : (a, b) … $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$. Toppun… sig paa Cirklen. Find Stedet for …

Opløsning. Ethvert Punkt … Sted har fra Midtpunktet D af A… maa derfor være en Cirkel lig… holdet 1 : 3 og ligedan belig… Fællespunkt.

der indsat i den anden giver

$$y = \frac{n-1}{n}(x+a) \quad \text{eller} \quad x = \frac{n}{n-1}y - a.$$

Nr. m faar ma og intet mere, da Summen nu er opbrugt.

Nr. (m — 1) faar da $\frac{n}{n-1} \cdot ma - a$

Nr. (m — 2) faar

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \cdot ma - \left(\frac{n}{n-1}\right) \cdot a - a$$

. . . .

Nr. 1 faar

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{m-1} \cdot ma - \left(\frac{n}{n-1}\right)^{m-2} \cdot a \ldots - \left(\frac{n}{n-1}\right) a - a.$$

Summen S bliver da

$$S = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^m - 1}{\frac{n}{n-1} - 1} \cdot ma - \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{m-1} - 1}{\frac{n}{n-1} - 1} \cdot a$$

$$- \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{m-2} - 1}{\frac{n}{n-1} - 1} a \ldots - a.$$

Det første Led reduceres til $(n-1) \cdot ma \left[\left(\frac{n}{n-1}\right)^m - 1\right]$, medens Summen af de øvrige Led kan skrives

$$-\frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{m-1} + \left(\frac{n}{n-1}\right)^{m-2} + \ldots + \left(\frac{n}{n-1}\right) - (m-1)}{\frac{n}{n-1} - 1} \cdot a$$

$$= -\frac{n\left[\left(\frac{n}{n-1}\right)^{m-1} - 1\right] - (m-1)}{\frac{1}{n-1}} \cdot a, \quad \text{altsaa}$$

$$S = \left[\left(\frac{n}{n-1}\right)^{m-1} \cdot n(m-n+1) + (n-1)^2\right] \cdot a$$

Er $n = \infty$, bliver alle Kvotienterne 1, det brugte Udtryk for Kvotientrækkens Sum gælder da ikke, men man faar

Litteratur.

S. A. Christensen og **Karl Schmidt:**
Aritmetik og Algebra I. Odense 1891.

Knud Christensen og **Karl Schmidt:**
Elementær Plangeometri. Odense 1891.

Det var med ikke ringe Forventninger, at Anm. begyndte at læse disse nye Lærebøger igennem. I Fjor skrev nemlig den ene af Forfatterne, Hr. Overlærer Karl Schmidt, en Afhandling i Odense Kathedralskoles Program, hvori han blandt andet fremhævede Vanskelighederne ved Matematikundervisningen nu til Dags, væsentligst fordi Lærebøgernes Tekst skulde være for koncis for Begyndere, deres Stil skulde nærme sig til »Lapidarstil«, og de skulde i det hele være nær ved »ikke at være andet end Opgavesamlinger«. »Matematik er [for Disciplene] et saare vanskeligt Fag, og det navnlig af den Grund, at det ikke er dem muligt at læse det paa egen Haand, fordi Lærebøgerne mangle saa meget (Forklaringer, Mellémled i Beviser osv.), som efter min Mening burde staa der.« Det kan derfor ikke undgaas, i en Anmeldelse af disse nye Bøger, af og til at sammenligne dem med de Lærebøger, hvortil der maa være sigtet i ovenstaaende Citat, nemlig Professor Julius Petersens; thi det maa fornuftigvis antages, at det har været Forfatternes Mening at afhjælpe de formentlige pædagogiske Mangler ved hine, temmelig udbredte Lærebøger.

Geometrien. Anmelderen hører til de Lærere, der finde, at Professor Petersens Geometri paa enkelte Steder er for kortfattet; men jeg kan ikke se, at den anm. Bog er udførligere paa mange Steder, hvor det kunde være ønskeligt, eller at de Forsøg, som andre Steder ere gjorte for at afhjælpe denne Mangel, ere faldne synderlig heldigt ud. Lad os tage nogle Eksempler! I J. P. § 22 hedder det: »Vinklerne maa her [i en ligesidet Trekant] alle være ligestore (20), altsaa hver 60°, og omvendt.« Ved dette »og omvendt« antydes altsaa i stor — for stor — Korthed baade en Sætning og Beviset for den. I C. & S. § 25 staar der: »Da en ligesidet Trekant

$$\log\frac{h}{3} = 0{,}83719$$

$$3{,}08166$$

$$V = 1206{,}9.$$

Udsnittene u_1, u_2, u_3, u_4.

$$u_1 = \frac{21721}{129600}\cdot\pi r^2$$

$$u_2 = \frac{39780}{129600}\cdot\pi r^2$$

$$u_3 = \frac{46863}{129600}\cdot\pi r^2$$

$$u_4 = \frac{21236}{129600}\cdot\pi r^2;$$

$$\log\frac{\pi r^2}{129600} = 0{,}39516 - 3$$

adderet til de forskellige Tælleres Logaritmer giver

$$\log u_1 = 1{,}73204;\quad u_1 = 53{,}956$$

$$\log u_2 = 1{,}99482;\quad u_2 = 98{,}815$$

$$\log u_3 = 2{,}06599;\quad u_3 = 116{,}41$$

$$\log u_4 = 1{,}72223;\quad u_4 = 52{,}751.$$

Afsnittene

$$a_1 = u_1 - t_1 = 9{,}434$$

$$a_2 = u_2 - t_2 = 50{,}822$$

$$a_3 = u_3 - t_3 = 77{,}26$$

$$a_4 = u_4 - t_4 = 8{,}836.$$

De tilsvarende Volumina V_1, V_2, V_3, V_4 Kub',

$$V_1 = \frac{a_1 h}{3} = 64{,}847$$

$$V_2 = \frac{a_2 h}{3} = 349{,}33$$

$$V_3 = \frac{a_3 h}{3} = 531{,}06$$

$$V_4 = \frac{a_4 h}{3} = 60{,}737.$$

IV.

Der er givet to ligesidede Hyperbl·
Asymptoter. En foranderlig Trekant F

ledes, at P bestandig ligger paa den ene Hyperbel, Q og R paa den anden, og at PQ og PR ere parallele med Asymptoterne

Vis, at Arealet af Trekant PQR kan udtrykkes alene ved de givne Hyperblers Halvaxer.

Hvilket er det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem Tangenterne i Q og R til den Hyperbel, hvorpaa disse Punkter ligge?

Opløsning: Hyperblens Asymptoter vælges til Koordinataxer. Ligningerne ere da $xy = \frac{a^2}{2}$ og $xy = \frac{a_1^2}{2}$. Lad P have Koordinaterne x_1 og y_1, Q x_2 og y_1, R x_1 og y_2; da er

$$2T = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_1 & 1 \\ x_1 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1.$$

Nu er imidlertid

$$x_1y_1 = \frac{a_1^2}{2},\quad x_1y_2 = \frac{a^2}{2},\quad x_2y_1 = \frac{a^2}{2};$$

de to sidste give

$$x_1y_1x_2y_2 = \frac{a^4}{4},$$

altsaa

$$x_2y_2 = \frac{a^4}{2a_1^2}.$$

Indsættes disse Udtryk, faar man

$$2T = \frac{a_1^2}{2} + \frac{a^4}{2a_1^2} - a^2,$$

$$T = \frac{(a_1^2 - a^2)^2}{4a_1^2}.$$

Kaldes Koordinaterne til Skæringspunktet mellem Tangenterne i Q og R for x og y, har man, idet man erindrer, at Røringspunktet er Midtpunktet for det Tangentstykke, der ligger mellem Asymptoterne:

$$\frac{x}{2x_1} + \frac{y}{2y_2} = 1,\quad \frac{x}{2x_2} + \frac{y}{2y_1} = 1$$

eller

$$y_2x + x_1y = 2x_1y_2 = a^2 \quad (1$$

$$y_1x + x_2y = 2x_2y_1 = a^2 \quad (2$$

hvoraf ved Subtraktion og lidt Reduktion

$$\frac{y}{x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{a_1^2}{2x_1^2}. \qquad (3)$$

x_1 skal elimineres; Multipliceres (1) med x_1, faas

$$\frac{a^2}{2} . x + x_1^2 . y = a^2 . x_1,$$

der ved Benyttelse af (3) giver

$$\frac{a^2 + a_1^2}{2} x = \pm a^2 . a_1 . \sqrt{\frac{x}{2y}}$$

eller

$$xy = \frac{2a^4 a_1^2}{(a^2 + a_1^2)^2}.$$

Det søgte Sted er altsaa en Hyperbel med samme Asymptoter som de givne.

Løste Opgaver.

64. (Se Side 38.) Ligningen $z^2 - x^2 = 15$ kan ogsaa lade sig dele i

$$z + x = 15 \quad \text{og} \quad z - x = 1,$$

hvoraf $z = 8$, $x = 7$. Ved (1) faas $y = 4$.

Tallet er 74842. (J. C. Carlsen.)

(En fuldstændig Løsning er indsendt af Hr. Carl Petersen.)

69. Bevis, at en Diameter i en ligesidet Hyperbel fra et hvilketsomhelst Punkt af denne ses under en Vinkel, hvis Halveringslinier ere parallele med Asymptoterne.*)

Opløsning. Lad A (x_1, y_1) og B $(-x_1, -y_1)$ være Endepunkterne af Diameteren, medens P (x_2, y_2) er et vilkaarligt Punkt paa Hyperblen. Linien AP faar da Ligningen

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

eller, idet $xy = a$ er Hyperblens Ligning

$$y - \frac{a}{x_1} = \frac{\frac{a}{x_2} - \frac{a}{x_1}}{x_2 - x_1}(x - x_1) = \frac{-a}{x_1 x_2}(x - x_1),$$

*) I Texten Side 46 staar ved en Trykfejl Axerne i St. f. Asymptoterne.

hvoraf $ax + x_1 x_2 y - a(x_1 + x_2) = 0$

og paa Normalformen

$$\frac{ax + x_1 x_2 y - a(x_1 + x_2)}{\sqrt{a^2 + x_1^2 x_2^2}} = 0.$$

Ligningen for BP faas ved at bytte x_1 og y_1 med $-x_1$ og $-y_1$:

$$\frac{ax - x_1 x_2 y - a(x_2 - x_1)}{\sqrt{a^2 + x_1^2 x_2^2}} = 0.$$

Halveringsliniernes Ligninger ere da

$$\frac{(a \pm a)x + (x_1 x_2 \mp x_1 x_2)y - a(x_1 + x_2) \pm a(x_2 - x_1)}{\sqrt{a^2 + x_1^2 x_2^2}} = 0.$$

For den øverste Ligning er Koefficienten til y lig med 0, altsaa Linien parallel med Y-Axen; den anden er parallel med X-Axen.

(Herm. Olsen.)

79. At løse Ligningen

$$1 + \frac{2x}{x + 4a} + \frac{27a^2}{2x^2 + 7ax - 4a^2} = \frac{6a}{2x - a}.$$

Opløsning.

Nævneren $2x^2 + 7ax - 4a^2 = (2x - a)(x + 4a)$ og ved at multiplicere ligningen hermed får man

$$2x^2 + 7ax - 4a^2 + 2x(2x - a) + 27a^2 = 6a(x + 4a),$$

$$x^2 - \frac{ax}{6} = \frac{a^2}{6},$$

$$x - \frac{a}{12} = \pm \frac{5a}{12},$$

$x = \frac{1}{2}a$ eller $-\frac{1}{3}a$, som er ligningens 2 rødder.

(Magnus Berg, Framnes.)

(Ogsaa løst af J. Byskov, O. A. Smith og Herm. Olsen.)

80. Bevis at $x^{4n} - x^{3n} + x^{2n} - x^n + 1$ er deleligt med $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$, naar n er ulige.

Opløsning

$$\frac{x^{4n} - x^{3n} + x^{2n} - x^n + 1}{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1}$$

$$= \frac{x^{5n}+1}{x^n+1} : \frac{x^5+1}{x+1} = \frac{(x^{5n}+1)(x+1)}{(x^n+1)(x^5+1)}.$$

x^n+1 og x^5+1 gaa hver for sig op i $x^{5n}+1$, naar n er ulige; følgelig gaar deres Produkt ogsaa op, hvis de ere indbyrdes primiske, altsaa hvis n ikke er et Multiplum af 5.

Er derimod n et (ulige) Multiplum af 5, $n = 5q$, faas

$$(x^{20q} - x^{15q} + x^{10q} - x^{5q} + 1)(x+1)$$
$$\equiv 5(x+1)\,[\text{mod } x^5+1]$$

altsaa $x^{20q} - x^{15q} + x^{10q} - x^{5q} + 1 \equiv 5\,[\text{mod } x^5+1]$.

Sætningen gjælder altsaa kun, naar n er ulige, men ikke et ulige Multiplum af 5.

(Efter M. Chr. Madsen.)

82. Find x af Ligningen

$$\sqrt{a^2-x^2} + x\sqrt{a^2-1} = a^2(1-x^2).$$

Opløsning. Sættes $\sqrt{a^2-x^2} = m$ og $x\sqrt{a^2-1} = n$, haves

$$a^2 - x^2 = m^2,$$
$$a^2x^2 - x^2 = n^2,$$
$$a^2 - a^2x^2 = m + n,$$

hvoraf $$m^2 - n^2 = m + n,$$ der giver

1) $m - n = 1$, 2) $m + n = 0$.

1) Man finder

$$n = \frac{a^2 - a^2x^2 - 1}{2} = x\sqrt{a^2-1},$$

der ordnes til

$$a^2x^2 + 2x\sqrt{a^2-1} - (a^2-1) = 0,$$

$$x = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a^2}(-1 \pm \sqrt{a^2+1}).$$

2) $m + n = a^2 - a^2x^2 = 0$; $x = \pm 1$.

Ved Prøve findes, at den nederste Værdi af 1) kun tilfredsstiller Ligningen, naar den første Rodstørrelse tages negativ, den øverste Værdi af 2) kun naar den ene Rodstørrelse tages negativ.

(J. C. Carlsen.)

(Ogsaa løst af Herm. Olsen.)

men det er simpel hen en ny Definition; med rene Ord siges det dog først i § 65 a.

Til Slutning nogle Ord om Figurers Ligedannethed. I § 73 siges, at naar den ene Side i en Trekant parallelforskydes, saa skifter Trekanten bestandig Størrelse, »men dens Form forbliver uforandret. En Trekants Form ses heraf at være bestemt ved dens Vinkler, og derfor kalder man to Trekanter ligedannede, naar deres Vinkler ere stykkevis lige store.« Dette er at stille Sagen ganske paa Hovedet. Hvorfra skulde jeg vel vide, at en Trekants Form forbliver uforandret, naar dens ene Side parallelforskydes? Jeg kan intet Begreb have om, hvad det vil sige, at to Trekanter have samme Form, førend det siges mig, hvad Geometrien forstaar derved, eller — som man siger — førend det bliver defineret; det gaar virkelig ikke an at indsmugle et nyt, ubestemt Erfaringsbegreb »Form« i Geometrien, som netop skal klare vor Forestilling om, hvad Form er. Det er i det hele karakteristisk for Definitionerne i den anm. Bog, at de næsten alle indeholde et »da« eller »altsaa« eller »derfor«. Ellers anses Definitionerne for at være det Fundament, hvorpaa Geometriens Tankebygning skal bygges op, og som derfor ikke kræve nogen Begrundelse. Det kommer igen i § 82, hvor det postuleres, at et Kvadrat og et Rektangel have forskellig Form. Hvorfor det? Der fortsættes saaledes: »En vilkaarlig Polygons Form beror baade paa Vinklernes Størrelse og paa Sidernes Forhold, og to saadanne Polygoner ere derfor kun ligedannede, naar deres Vinkler ere stykkevis lige store i samme Orden, og deres ensliggende Sider ere proportionale«. Blev de to Dele, hvoraf dette Punktum bestaar, byttede om, mens Ordet »derfor« blev staaende, saa vilde der være god Mening i det; som det nu lyder, er det kun forvirrende.

Aritmetikken. Hvis denne Bog skulde bedømmes ud fra det Synspunkt, at en Skolediscipel skal kunne læse sin Lektie »paa egen Haand« efter den, kunde man hurtig blive

Mulighedsbetingelse:

$$1)\quad \operatorname{tg}\frac{90^0 + \frac{\alpha}{2}}{2} \leqq \frac{\frac{1}{2}c}{r}, \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \leqq \frac{c^2 - 4r^2}{4cr},$$

2) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} < \frac{r}{c}$, og naar Cirklerne skære hinanden tillige

$$\operatorname{tg}\frac{90^0 - \frac{\alpha}{2}}{2} \leqq \frac{\frac{1}{2}c}{r}, \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \geqq \frac{4r^2 - c^2}{4rc},$$

3) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{a} < \frac{c}{r}$,

idet c er Centerlinien og r Radius.

(I. C. Carlsen.)

85. En Trekant ABC er indskrevet i en Cirkel, D er Midtpunktet af Buen BAC. Bevis, at Produktet af Siderne AB og AC er lig Differensen mellem Kvadraterne paa Linierne DB og DA.

Opløsning. Man har (AB > AC)

$$AB \, . \, DC = AC \, . \, DB + DA \, . \, BC,$$

$$\frac{AB}{DC} = \frac{DA \, . \, AC + DB \, . \, BC}{DA \, . \, DB + AC \, . \, BC}$$

og $DB = DC$.

Elimineres DC og BC heraf, faas

$$AB \, . \, AC = DB^2 - DA^2,$$

hvilket skulde vises.

(J. C. Carlsen).

(Ogsaa løst af Herm. Olsen og E. Schou.)

86. En qvadrat ABCD är gifven. Drag från A en rät linie AEF, som skär sidan CD i E och förlängningen af sidan BC i F så, att stycket EF blir af gifven längd.

Opløsning. Sættes $AB = a$, $EF = k$, $BF = x$ og $DE = y$, faas

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{y} \qquad (1)$$

$$\sqrt{x^2 + a^2} - \sqrt{\;} \qquad (2)$$

Kvadreres (2) og indsætt

$$x^2 + y^2 + 2xy - 2a\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy} = k^2,$$

hvoraf $\quad x + y = a + \sqrt{a^2 + k^2} = 2m,$

som i Forening med (1) giver

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2},$$

hvor x er den øverste Værdi, y den nederste.

Konstruktionen kan udføres saaledes. Paa Forlængelsen af AD afsættes DG = k; G føres om C hen paa Forlængelsen af BC som H. BH = 2m halveres i K; over BK slaas en Halvcirkel, i denne afsættes Korden BL = a. L føres om K hen paa KH i F. AF er den søgte Linie.

(J. C. Carlsen.)

87. Lös eqvationen

$$x^4 - 2x^3 + x - a = 0.$$

Opløsning. Uddrages Kvadratroden af Ligningens venstre Side, faas $x^2 - x - \frac{1}{2}$ og Resten $-a - \frac{1}{4}$, altsaa

$$(x^2 - x - \tfrac{1}{2})^2 - (a + \tfrac{1}{4}) = 0, \qquad \text{hvoraf}$$

$$x^2 - x - \tfrac{1}{2} = \pm\sqrt{a + \tfrac{1}{4}},$$

$$x = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{3}{4} \pm \sqrt{a + \tfrac{1}{4}}}.$$

(Herm. Olsen.)

(Ogsaa løst af J. C. Carlsen, E. Schou samt af M. C. Madsen, der angiver Betingelsen for, at $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ kan skrives paa Formen $(x + h)^4 + p(x + h)^2 + q = 0$, til at være $C = \frac{AB}{2} - \frac{A^3}{8}$, samt $h = \frac{A}{4}$, $p = B - \frac{3}{8}A^2$, $q = D + \frac{5A^4}{256} - \frac{A^2B}{16}$; Betingelsen er opfyldt for den forelagte Ligning o. s. v.

88. Bestem Forholdet mellem Katheterne i en retvinklet Trekant, naar den indskrevne Cirkel gaar gjennem Medianernes Skæringspunkt.

Opløsning. Katheterne kaldes a og b, Hypotenusen c. O er Cirklens Centrum, M Tyngdepunktet, N Fodpunktet af den vinkelrette fra M paa Radien til Røringsp. med Siden a. $\triangle$ ONM er retvinklet ved N. Man finder

$$OM = r = s - c = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}c$$
$$ON = r - \tfrac{1}{3}b = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{6}b - \tfrac{1}{2}c$$
$$MN = \tfrac{1}{3}a - (s - c) = \tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{6}a - \tfrac{1}{2}b.$$

Af $\overline{OM}^2 = \overline{ON}^2 + \overline{MN}^2$

faas ved Reduktion

$$3ab + 3(a + b)c = 5(a^2 + b^2),$$

der, da $c = \sqrt{a^2 + b^2}$,

bliver $3ab + 3(a + b)\sqrt{a^2 + b^2} = 5(a^2 + b^2)$,

eller, naar $\frac{a}{b} = x$,

$$3x + 3(x + 1)\sqrt{x^2 + 1} = 5(x^2 + 1).$$

Denne Ligning rationaliseres til

$$(x^2 + 1)^2 - 3x(x^2 + 1) + \tfrac{9}{16}x^2 = 0,$$

hvoraf de reelle Værdier af x

$$x = \tfrac{1}{8}(6 + 3\sqrt{3} \pm \sqrt{36\sqrt{3} - 1}) = \frac{a}{b}$$

Produktet af de to Værdier er 1, som man kunde vente. Trekantens spidse Vinkler blive $67^0\,11'\,8''$ og $22^0\,48'\,2''$.

(M. C. Madsen.)
(Ogsaa løst af J. C. Carlsen.)

90. I en Firkant med Siderne a, b, c og d, som baade er ind- og omskrivelig, trækkes Diagonalerne. I de fire smaa Trekanter, hvori Firkanten herved deles, indskrives Cirkler Betegnes Radius i den Cirkel, som rører Siden a ved r_a, skal man bevise, at

$$c \cdot r_a = d \cdot r_b = a \cdot r_c = b \cdot r_d.$$

Opløsning. Lad Firkanten være ABCD, idet AB = a, BC = b, osv. Diagonalernes Skæringspunkt kaldes O. Man har da:

$$\frac{\triangle ABO}{\triangle CBO} = \frac{AO}{CO} = \frac{\triangle ABD}{\triangle CBD},$$

eller

$$\frac{r_a(a + BO + AO)}{r_b(b + BO + CO)} = \frac{ad}{bc}. \quad (1).$$

Da $\triangle AOB \sim \triangle DOC$ og $\triangle COB \sim \triangle DOA$, bliver

$$\frac{BO}{CO} = \frac{a}{c} \text{ og } \frac{BO}{AO} = \frac{b}{d};$$

af disse Ligninger dannes

$$\frac{BO}{BO + CO} = \frac{a}{a + c} \text{ og } \frac{BO}{BO + AO} = \frac{b}{b + d};$$

divideres disse to Ligninger og benyttes, at $a + c = b + d$, faar man

$$\frac{BO + AO}{BO + CO} = \frac{a}{b} = \frac{a + BO + AO}{b + BO + CO}.$$

Derved bliver (1):

$$\frac{a r_a}{b \,.\, r_b} = \frac{ad}{bc},$$

eller

$$c \,.\, r_a = d \,.\, r_b.$$

Paa samme Maade maa man have

$$d \,.\, r_b = a \,.\, r_c, \quad a \,.\, r_c = b \,.\, r_d, \text{ osv.}$$

altsaa

$$c \,.\, r_a = d \,.\, r_b = a \,.\, r_c = b \,.\, r_d.$$

(P. A. Larsen.)

91. En Firkant ABCD er baade ind- og omskrivelig. O er Centrum for den indskrevne Cirkel, Firkantens Sider ere a, b, c og d, og s er den halve Perimeter.

Vis at

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 = \frac{(ab + cd)^2 + (ad + bc)^2}{s^2}.$$

Opløsning. $AB = a$; r den indskrevne Cirkels Radius. Man har

$$\frac{r}{OA} = \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-d)(s-a)}{ad + bc}} = \sqrt{\frac{bc}{ad + bc}},$$

hvoraf

$$\overline{OA}^2 = r^2 \,.\, \frac{ad + bc}{bc}, \text{ og de tre analoge.}$$

Ved Addition faas

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 = \frac{r^2}{abcd}\left((ab + cd)^2 + (ad + bc)^2\right).$$

Desuden er Firkantens Areal lig

$$rs = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} = \sqrt{abcd},$$

hvoraf $\frac{r^2}{abcd} = \frac{1}{s^2}$; indsættes dette, faas det forlangte.

(J. C. Carlsen.)

92. Opløs Ligningen

$$\sqrt{(x-a)^2 + (x-b)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (x-d)^2}$$
$$= \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}.$$

Opløsning. 1. Kvadreres Ligningen, isoleres den da forekommende Rodstørrelse, kvadreres atter, sammentrækkes og ordnes, faas

$$(a - b - c + d)^2 x^2 - 2(a - b - c + d)(ad - bc)x$$
$$+ (ad - bc)^2 = 0,$$

hvoraf
$$x = \frac{ad - bc}{(a + d) - (b + c)}.$$
(J. C. Carlsen.)

2. Tænker man sig tre Punkter A, B, C, i et retvinklet Koordinatsystem, henholdsvis med Koordinaterne (x, x), (a, b) og (c, d), saa udtrykker Ligningen, at BA + AC = BC, men for at dette kan finde Sted, maa de tre Punkter ligge paa samme rette Linie; dette kan ogsaa udtrykkes ved, at

$$\frac{x - b}{x - a} = \frac{b - d}{a - c},$$

eller
$$(a - c)x - ab + bc = (b - d)x - ab + ad,$$

hvoraf
$$x = \frac{ad - bc}{(a + d) - (b + c)}.$$
(Herm. Olsen.)

(Ogsaa løst af Johannes Petersen.)

Litteratur.

Lärogång vid den grundläggande undervisningen i räkning jämte metodiska anvisningar. Af K. P. Nordlund, lektor vid Gefle högre allmänna läroverk. Stockholm, C. E. Fritze's K. Hofbokhandel. (XVI + 108 Sider, Pris 1,25.)

Det turde være en ret bekjendt Sag, at det staar ilde til med Regnefærdigheden navnlig hos Elever af de højere Skoler (ɔ: Ikke—Almueskoler) her i Landet, specielt i Kjøbenhavn. Det er jo virkelig ogsaa en vanskelig Opgave at lære Børn at regne, ligesaa vansk[illegible] som den er taknemlig, naar det lykkes at gribe [illegible] de. »Den rigtige Maade« .r [illegible] den

naturligvis ved enhver Undervisning, men vistnok langt mere her end andetsteds; den er i høj Grad afhængig af Elevernes Natur. Den medfødte Evne, Talentet, som en Lærer ligesaa vel som en Forfatter, Kunstner, Mekaniker etc. maa være i Besiddelse af, maa her diktere Læreren det rette; men der er dog visse alméngældende Regler, som enhver Lærer bør følge. For den begyndende Lærer er det ogsaa godt, at han har et System, han kan holde sig til, da der ellers kommer en Usikkerhed og Famlen ind i en Undervisning, hvor der netop skal være Fasthed og Orden. Dette gælder selv for Læreren Vedkommende, der har Evnen og Villien — og i hvor langt højere Grad saa ikke for »Læreren«, der kun betragter sin Gjerning som et forbigaaende, nødvendigt Onde. At denne »Lærer« existerer her i Kjøbenhavn og vel i alle store Byer med Universitet, er bekjendt; at han ofte bliver, eller i hvert Fald indtil for ganske nylig blev anvendt som Regnelærer, og det navnlig for de smaa, er desværre ogsaa en Kjendsgerning, der for udenforstaaende Fagmænd maa synes utrolig. At sætte en eller anden ung Student eller paa Embede ventende Kandidat af et af Fakulteterne, der skal have Tiden til at gaa og fortjene lidt, til at varetage denne meget vigtige og vanskelige Gren af Undervisningen, den indledende Regne-undervisning, hvor Grunden skal lægges til den rolige og sikre Regnefærdighed, der er saa vigtig for Livet, synes jo meget letsindigt, og det kan forbavse, at Forældrene ville finde sig deri, men det maa vel skyldes Mangel paa Forstaaelse af Lærergerningens Betydning og Ansvar hos begge Parter.

Og dertil kommer vel saa den Betragtning, som man ikke sjeldent hører fremsat: »Aa hvad, Regning det er da ikke noget at gøre saa meget Væsen af. Vi lærte saamænd meget godt at regne, skønt vor Lærer ikke bestilte noget; han sad paa sit Kateder og læste, medens han lod os passe os selv og regne paa vor Tavle; kun i Slutningen af Timen saa han paa Facit'erne og gav os en Karakter. Men vi havde paa Fornemmelsen, hvorledes vi skulde bære os ad, og det gik

brillant«. Ja det troes nok, at det gik for velbegavede og lærenemme Elever, saadanne behøve jo overhovedet kun meget ringe Undervisning og for deres Skyld behøver man ikke at gjøre sig nogen Ulejlighed med at udtænke Systemer; nej det er for den store Masse af jævnt begavede Elever, der kunne gøre Fordring paa at lære at arbejde rationelt og med saa lidt Energispild som muligt. Baade Lærer og Elever skulle arbejde, derved udvikles ogsaa bedst Pligtfølelsen, om hvilken man vist ikke ganske med Urette siger, at den taber sig i vor Tid.

Lad os da haabe, at den foreløbige »Lærer« snart maa gaa ganske ud af Spillet, og at der, i hvert Fald i vort Fag, kun maa findes Lærere, der med Alvor og Interesse tage sig af deres Gerning. Men saadanne behøver som sagt ogsaa Vejledning og navnlig til den indledende Undervisning; da desuden Lærerpersonalet kan komme til at skifte fra en Klasse til en anden, er det af Betydning, at der er et fast System at gaa efter, for at den nye Lærer kan tage fat, hvor den tidligere slap.

Hr. Lektor Nordlunds Bog, hvis Titel ovenfor er angivet, indeholder Vejledning for Lærere og System. Anm. kjender ikke andre end denne, og den er god — en dobbelt Grund til at anbefale den. Hvorvidt den tiltrænges i Sverige, véd Anm. ikke, om jeg end formoder det; at den vil kunne afhjælpe et Savn i Anm.'s Hjemsted, hvis herværende begyndende Lærere eller Læreraspiranter ville gjøre sig bekjendte med den, betragter jeg som givet.

Jeg betvivler ikke, at de fleste, naar de have gennemset Bogen, ville sige: »Aa, er det ikke andet, det kunde vi virkelig sige os selv« — men det er netop et Fortrin ved Bogen; det viser, at den er naturlig og ligefrem og ikke indeholder noget kunstigt eller opstyltet. Og Bemærkningen »det kunde vi sige os selv« er jo ikke ganske det samme som »det sige vi os selv eller have vi sagt os selv«; nej. [illegible] netop dét, at man bliver gjort opmærksom de[illegible] trænges.

Først og fremmest formaner Forf. Læreren til at anvende et klart og tydeligt Sprog og aldrig lade urigtige og dunkle Svar passere. Adskillige urigtige og intetsigende Udtryk og Talemaader have desværre efterhaanden vundet Hævd ved Regneundervisningen, siger Forf. med Rette. Udtrykket: »Arealet af et Rektangel er Produktet af Grundlinie og Højde«, hører egentlig hertil. Man bemærke det fremhævede meningsløse Udtryk i Opgaven: »Imellem et Antal Personer fordeltes 247 Kr., og det viste sig da, at hver Person havde faaet 6 Kroner mere end Personernes Antal. Hvormange var der?« Forf. har taget denne ud af en meget anvendt Samling; der findes uden Tvivl mange analoge. Hvis Knaphed i Udtrykket, saa ønskelig den end er, skal vindes paa Bekostning af Korrekthed, bliver den forkastelig; lad os endelig holde paa det. Løses Opgaven: »Naar 7 ℔ koster 98 Øre, hvad koster da 12 ℔?« saaledes:

$$\left.\begin{array}{r}7\ \text{℔} - 98\ \text{Øre}\\ 12\ \text{℔} - x\ \text{Øre}\end{array}\right\}\ x = \frac{98\ .\ 12}{7} = 1\ \text{Kr.}\ 68\ \text{Øre},$$

er det ukorrekt. x er lig det ubenævnte Tal 168, der absolut ikke er lig 1 Kr. 68 Øre; den Tilbøjelighed til glat væk at gaa over fra ubenævnte til benævnte Tal og bruge disse Former i Flæng, som Eleverne have, og som man stadig maa kæmpe imod, skyldes naturligvis, at der ikke i Tide er traadt op derimod. Ovenstaaende Opgaves Løsning bør være: ... x = 168; altsaa koster 12 ℔ 168 Øre = 1 Kr. 68 Øre.

Hr. N's lärogång anviser følgende Undervisningsgang i Timen:

»Hvarje öfning inledes af undervisaren genom lämpliga frågor, till en början mycket enkla, hvilka ställas till alla lärjungarna, som samtidigt undervisas. Härvid är det nödvändigt, att läraren lemnar dem så lång tid, som är nödig för alla att finna svaret på den framställda frågan. När de genom något tecken uppgifvit sig hafva funnit svaret, låter läraren de minst begåfvade först afgifva sina svar. Därigenom tvingas dessa att begrunda frågan, hvil-

ket mången gång ej skulle blifva händelsen, om läraren först fordrade svaren af de bättre begåfvade. De sämre skulle i sådant fall afgifva samma svar som de bättre, äfven om de ej erhållit något svar alls eller de erhållit ett, som varit afvikande från det förut afgifna. I sammanhang härmed påpekas, att läraren ej bör upphöra att upphämta svaren, sedan han erhållit det rätta, ty det är för läraren nödigt att få höra de orätta svaren för att kunna visa, hvari deras oriktighet består. Särdeles är detta förhållandet med sådana orätta svar, som gifvas lika af två eller flere lärjungar. Att två eller flere afgifva samma oriktiga svar har sin grund dels däri, att läraren förut oklart eller oegentligt uttryckt sig, dels däri att lärjungarne missuppfattat något yttrande af läraren, och i bägge fallen böra felen så fort som möjligt undanröjas. Med stort skäl kan påstås, att en lärare har synnerligen mycket att lära af oriktiga svar, förutsatt att han gör sig besvär med att uppsöka deras källa.

När lärjungarna genom frågor blifvit på detta sått förberedda, låter läraren dem genomgå motsvarande afdelning i en exempelsamling. Lärjungarna tillsägas att genomräkna exemplen tvänne gånger eller flere, om de erhållit olika svar; helst böra de bägge räkningarna verkställas på olika sätt. Läraren bör noga tillse, att denna hans tillsägelse blir åtlydd. Emedan ett rätt svar är det, som i första hand bör eftersträfvas, måste all täflan i snabbräkning helt och hållet bannlysas, ty erfarenheten har klart visat, till hvilka menliga följder denna täflan har ledt, nämligen slarf med åtföljande osäkerhet.«

Hensigtsmæssigheden af denne Fremgangsmaade er selvindlysende; den duelige Lærer vilde sikkert ogsaa efter nogen Tids Virksomhed af sig selv »finde paa« at anvende den — men denne første Tids Famlen bør undgaas og vilde undgaas, naar Læreren forinden havde gennemlæst denne Vejledning.

Forf. fordrer, at Barnet ved Selvvirksomhed skal gøre sig bekendt med de autoriserede Maal og Vægt, altsaa selv maale

b) Der kan være 2 Tilfælde: [1]) n lige, [2]) n ulige.

[1]) Paa samme Maade som ovenfor faas hver anden Side ligestor. Man konstruerer da en $\frac{n}{2}$-kant. Lad en Side i denne være AC. Den givne Side afsættes som AB (B ligger mellem A og C); BC drages. Man kjender nu alle Siderne og n-kanten konstrueres.

[2]) Man finder her, at alle Siderne maa være ligestore. Løsningen afhænger derfor af, om den givne Side netop er n-kantsiden til den givne Cirkel.

I første Tilfælde afhænger Løsningen af, at man kan konstruere en regulær $\frac{n}{2}$-kant, og i sidste Tilfælde af, at man kan konstruere en n-kant.

(Herm. Olsen.)

74. At diskutere Rødderne i Ligningen

$$(k^2 + k - 2)x^2 + 2(k + 1)x - (k + 1) = 0.$$

Opløsning. k antages at være reel. Løses Ligningen, faas

$$x = \frac{-(k + 1) \pm \sqrt{(k + 1)[(k + 1)^2 - 2]}}{(k - 1)(k + 2)}.$$

Ved Betragtning af Rodstørrelsen ses, at Rødderne ere reelle, naar

$$-1 > k > -1 - \sqrt{2} \text{ eller } k > \sqrt{2} - 1,$$

men imaginære, naar

$$-1 < k < \sqrt{2} - 1 \text{ eller } k < -1 - \sqrt{2}.$$

For $k = -1 - \sqrt{2}$, $-1 + \sqrt{2}$ eller -1 ere Rødderne ligestore, i de to første Tilfælde begge lig 1, i sidste Tilfælde begge lig 0.

For $k = 1$ eller $k = -2$ er den ene Rod uendelig.

I den ordnede Ligning

$$x^2 + \frac{2(k + 1)}{(k - 1)(k + 2)}x - \frac{k + 1}{(k - 1)(k + 2)} = 0$$

har sidste Led og Koefficienten til x modsat Fortegn.

Have de reelle Rødder derfor samme Fortegn, maa de begge være positive; det sker, naar

$$1 > k > \sqrt{2} - 1 \text{ eller } -2 > k > -1 - \sqrt{2}.$$

Have de forskelligt Fortegn, maa den negative Rod være den numerisk største; dette indtræffer, naar

$$-1 > k > -2 \text{ eller } k > 1.$$

(Herm. Olsen.)

93. Bornholm antages at være en Firkant, hvis Vinkelspidser ere Rønne R, Hammeren H, Svaneke S, og Dueodden D; beregn Øens Fladeindhold, idet RH = 3 Mil; HS = 4,4 Mil; SD = 2,6 Mil; DR = 3,8 Mil og RS = 4 Mil.

Opløsning.

$$\triangle RHS = 0{,}09 \,.\, \sqrt{13 \,.\, 17 \,.\, 19} = 0{,}09 \,.\, 64{,}8 = 5{,}83 \text{ Kvm.}$$

$$\triangle RDS = 1{,}04 \,.\, \sqrt{7 \,.\, 3} = 1{,}04 \,.\, 4{,}58 = 4{,}76 \text{ Kvm.}$$

Bornholms Areal = 10,6 Kvm.

(Herm. Olsen.)

94. Produktet af det m^{te} og n^{te} Led i en Differensrække er p, Summen af de mellemliggende Led s. Bestem Rækken.

Ex.: $m = 20$, $n = 11$, $p = 100$, $s = 82$.

Opløsning. Antag 1^{sta} termen vara a och differensen d!

$$m^{te} \text{ termen} = a + (m - 1)\,d = u$$

$$n^{te} \quad » \quad = a + (n - 1)\,d = v$$

$$\therefore \text{ enl. uppgift } p = uv \,.\,.\,.\,.\,.\, (1).$$

De mellanliggande termerna

$$a + md,\ a + (m + 1)\,d,\ .\,.\,.\,.\,.\ a + (n - 2)\,d$$

och summa

$$\frac{u + v}{2}(n - m - 1) = s \,.\,.\,.\,.\,.\, (2).$$

Af (1) och (2) fås

$$\left.\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right\} = \frac{s}{n - m - 1} \mp \sqrt{\frac{s^2}{(n - m - 1)^2} - p}$$

100. Der er givet et System af Punkter $P_1, P_2 \dots P_{2n+1}$ samt en vilkaarlig Figur Σ; denne multipliceres med Hensyn til P_1 med det negative Forhold $-\frac{m}{n}$, hvorved en ny Figur Σ_1 fremkommer, der atter multipliceres med Hensyn til P_2 (Forhold: $-\frac{n}{m}$). Derved faas en tredje Figur Σ_2, der multipliceres m. H. t. P_3 (Forhold: $-\frac{m}{n}$) og saaledes videre, i det man faar en Række Figurer $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3 \dots$ ved efterhaands Multiplikation m. H. t. $P_1, P_2 \dots P_{2n+1}, P_1, P_2 \dots$ (Forhold skiftevis $-\frac{m}{n}$ og $-\frac{n}{m}$).

Bevis da, at man efter at have udført $2(2n+1)$ saadanne Multiplikationer kommer tilbage til den oprindelige Figur Σ. ($\Sigma_{2(2n+1)}$ er den samme Figur som Σ).

Idet Σ' (og altsaa ogsaa $\Sigma'_1, \Sigma'_2 \dots$) betegner et Punkt, skal dette konstrueres, i det man har opgivet Punkterne $P_1, P_2 \dots P_{2n+1}$, og ved, at man allerede skal naa tilbage til Σ' efter at have udført $2n+1$ af de ovennævnte Multiplikationer (Σ'_{2n+1} og Σ' skulle falde sammen).

Dersom en Kurve Σ indeholder Punktet Σ', angiv da den indbyrdes Beliggenhed mellem Kurvene Σ og Σ_{2n+1}.

(Johannes Petersen.).

Korrespondance.

Hr. Carl Petersen, Aarhus. Red. havde tænkt at optage den af Dem tilsendte Opgave til Løsning i dette Hefte — men maa desværre opgive det, da den falder sammen med Opgave II til Adgangsexamen ved polyteknisk Læreanstalt (se Side 92).

* * *

Løsninger af Opgaver maa være Red. i Hænde c. 3 Uger før et Heftes Udgivelse for at komme i Betragtning.

En geometrisk Sætning.

(Af P. A. Larsen.)

Naar man i en indskrivelig Firkant trækker Linier fra Sidernes Midtpunkter vinkelret paa de modstaaende Sider, (Diagonalerne betragtes som modstaaende Sider), gaa de seks Linier gjennem samme Punkt.

Det er tilstrækkeligt at føre Beviset for de tre Liniers Vedkommende, da det analogt let ses at gjælde for de andre. Lad Firkanten være ABCD og E, F, G og H Midtpunkterne af AB, BC, CD og DA, fremdeles O den omskrevne Cirkels Centrum og P det Punkt, hvor

$$EP \perp CD \text{ og } FP \perp DA$$

skære hinanden. Da er

$$EF \not\equiv GH, \quad FP \neq HO, \quad EP \neq GO,$$

hvoraf følger

$$EP = GO.$$

Da EOGP saaledes er et Parallelogram, har man

$$GP \neq OE \perp AB,$$

hvorved Sætningen er bevist.

Sætningen følger forøvrigt af en mere almindelig:

Naar man i en Firkant ABCD trækker Linier fra Midtpunkterne af AB, AD og AC, vinkelret henholdsvis paa CD, CB og BD, gaa de tre Linier gjennem samme Punkt.

Analytisk kommer dette yderst let frem; men ogsaa elementært vises det ganske let paa lignende Maade som ovenstaaende, idet man benytter de om $\triangle$ ABD og $\triangle$ CBD omskrevne Cirklers Centra. Ere disse O og O_1, P det konstruerede Punkt og P_1 det tilsvarende for Linierne CB, CD og CA, bliver da

$$PP_1 \not\equiv OO_1,$$

og P og P_1 falde altsaa sammen, naar Firkanten er indskrivelig. Men naar to af de fire paa den angivne Maade konstruerede Punkter falde sammen, vil de, som man let ser, alle gjøre det.

102. I en Trekant trækkes Linier fra Sidernes Midtpunkter vinkelret paa den omskrevne Cirkels Tangenter gjennem de modstaaende Vinkelspidser. Vis, at de tre Linier gaa gjennem samme Punkt.

103. P er et fast Punkt i en ligesidet Hyperbel, A og B Endepunkterne af en bevægelig Diameter.

Find det geometriske Sted for Centret af △ APB's omskrevne Cirkel.

104. Find Ligningen for den Cirkel, der gaar gennem Fodpunkterne af de 3 Normaler, der kunne trækkes fra et givet Punkt til en given Parabel.

(103—104 af B-x.)

105. Bevis at

$$\pi = 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 \ldots}}}$$

naar n, der betyder Antallet af Rodtegn, vokser uden Grænse.

(Adolf Lomholt.)

106. Der er givet en begrænset Linie AB og paa den et Punkt C, samt en Linie L. At konstruere den Cirkel, der gaar gennem A og B og af L afskærer den mindste Korde.

Korrespondance.

Hvorledes løses Opgaven: Hvormange forskellige Udtryk kan man, ved Ombytning af Bogstaverne, danne af $(a+b)(c+d)(e+f)\ldots$, hvor Bogstavernes Antal er $2n$?

Svar. Det Antal Maader, hvorpaa $2n$ Elementer kan deles i n Grupper med 2 i hver, findes saaledes: 2 kan udtages af $2n$ paa $K_{2n,2}$ Maader, derefter 2 af $2n-2$ paa $K_{2n-2,2}$ Maader etc.

$$K_{2n,2} \cdot K_{2n-2,2} \ldots K_{4,2}$$

vil derfor være det søgte Antal, multipliceret med $[n]$; thi kaldes et Sæt Grupper $g_1, g_2 \ldots g_n$, vil i ovenstaaende være indeholdt alle de ved Permutation af disse n dannede.

Det søgte Antal er altsaa

$$\frac{K_{2n,2} \cdot K_{2n-2,2} \ldots K_{4,2}}{[n]} = \frac{[2n]}{[2]^{2n}[n]}.$$

Om Grænseværdien for x^n.

I de elementære Lærebøger i Algebra bevises det, at x^n voxer med n, naar det konstante Tal x er større end 1. Det er imidlertid derved endnu ikke godtgjort, at x^n voxer i det uendelige samtidig med n. Man kan nu ganske vist mene, at det er tilstrækkeligt rent historisk at henlede Disciplenes Opmærksomhed herpaa ved den rent elementære Undervisning (indtil Præliminærexamen), og jeg for mit Vedkommende deler fuldt ud denne Mening. Derimod tror jeg rigtignok, at et Bevis kan medtages ved Undervisningen til de lærde Skolers Afgangsexamen, hvor Disciplenes større Modenhed gjør en Forstaaelse mulig. Sætningen benyttes jo nemlig ikke blot ved Beviset for, at en uendelig Kvotientrække kan have en endelig Sum, men end ikke de bekjendte Logarithmesætninger: $\log \infty = \infty$ og $\log 0 = -\infty$ ere godtgjorte, inden det nævnte Bevis er ført.

Jeg skal her nævne et Par simple Beviser for Sætningen. Af disse er det første et Exempel paa en Methode, der hyppigt benyttes ved Undersøgelsen af Produktudviklingers Konvergens, medens det sidste er mere specielt, og maaske nok saa nær slutter sig til det elementære Pensum.

I. Naar a og b ere to positive Tal, har man

$$(1 + a)(1 + b) = 1 + a + b + ab > 1 + a + b.$$

Heraf følger, idet a,b,... k alle ere positive,

$$(1 + a)(1 + b)\ldots(1 + k) > 1 + a + b + \ldots k.$$

Naar nu x er større end 1, kan man sætte $x = 1 + a$, hvor a er positiv, og faar

$$x^n = (1 + a)^n > 1 + na.$$

Her kan nu $1 + na$ gjøres større end ethvert nok saa stort positivt Tal A, idet man kun behøver at vælge n saa stor, at

$$1 + na > A$$

eller

$$n > \frac{A - 1}{a}.$$

II. Af den bekjendte Sumformel

$$1 + x + x^2 + \ldots x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1},$$

hvor man forudsætter $x > 1$, faar man, da i saa Fald alle Potenserne af x ere større end 1,

$$x^n = 1 + (x - 1)(1 + x + x^2 + \ldots x^{n-1}) > 1 + (x - 1)n,$$

og det sidste Led ses som ovenfor at kunne blive større end ethvert Tal.

Det skal endnu blot bemærkes, at der af $\lim x^n = \infty$, naar $x > 1$, strax følger $\lim x^n = \lim 1 : \left(\frac{1}{x}\right)^n = 0$, naar $x < 1$.

(C. Juel.)

Om Konstruktion af et Keglesnit med givet Brændpunkt og som gaar igjennem 3 givne Punkter.

Det er bekjendt, at et Keglesnit er bestemt ved at gaa igjennem 3 givne Punkter og have et givet Brændpunkt; Konstruktionen af Keglesnittet kan ske paa forskjellig Maade; efterfølgende synes simpel: Hvis Brændpunktet er F og de to af Punkterne, hvorigjennem Keglesnittet skal gaa A og B, deres Afstande fra Ledelinien, der svarer til F, AP og BQ, da er Excentriciteten $= \frac{AF}{AP} = \frac{BF}{BQ}$, altsaa $\frac{AF}{BF} = \frac{AP}{BQ}$; skærer nu Ledelinien AB i M, da er $\frac{AP}{BQ} = \frac{AM}{BM}$, altsaa $\frac{AF}{BF} = \frac{AM}{BM}$; M maa derfor være Skæringspunkt mellem AB og en af de Linier, der halvere Vinklerne mellem FA og FB; paa samme Maade bestemmer man Skæringspunktet mellem Ledelinien og AC, naar C er det 3dje givne Punkt.

Denne Bestemmelse af Ledelinien viser, at Opgaven har 4 Løsninger, idet man, naar Ledelinien er funden, ogsaa kjender Excentriciteten $= \frac{AF}{AP}$. —

Det kan tilføjes, at Ledelinien ved en Parabel eller en Ellipse altid maa skære Forlængelsen af en Korde i Keglesnittet; heraf fremgaar, at af de 4 Keglesnit, der have det givne Brændpunkt og gaa gjennem de givne Punkter er højst ét en Ellipse eller Parabel.

(E. C. Valentiner.)

Svenske Examensopgaver.

Maturitetsexamen.

(Høstterminen 1891.)

Mekaniska och fysikaliska:

1) Den raka kanten af en vågrät bordskifva löper parallelt med en lodrät vägg på 18 cm:s afstånd från densamma. Ett homogent klot, hvars diameter är 26 cm., hvilar mot bordkanten, men har tillika stöd mot väggen. Hur stort är trycket mot bordkanten i förhållande till klotets vigt?

Opløsning. Kaldes Kuglens Vægt P, Bordets Reaktion X og dennes Vinkel med en lodret Linje x, faar man, idet Kræfternes lodrette Projektioner maa holde hinanden i Ligevægt:

$$P = X \cos x.$$

Af en Figur ses let, at $\cos x = \frac{12}{13}$, og altsaa er

$$X = \frac{13}{12} . P.$$

2) En kanonkula, som lemnar kanonens mynning med en hastighet af 440 m., bör ej någonstädes höja sig i sin bana mer än 7 m. öfver det genom kanonmynningen gående horisontalplanet. Huru skall kanonen riktas? Accelerationen vid fritt fall är 9,8 m.

Opløsning. Af en bekjendt Formel er den største Højde y, som et Legeme naar ved Kastebevægelsen:

$$y = \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Indsættes $y = 7^m$, $a = 440^m$ og $g = 9{,}8^m$, faas

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{137{,}2}}{440}$$

$$\alpha = 1^0\ 31'\ 32''.$$

3) En träcylinder simmar upprät i olja, hvari den är nedsänkt $0{,}95$ af sin rymd. Ofvanpå oljan hälles så mycket sprit, att den nätt och jämt når upp till cylinderns öfre kant. Huru stor del af cylindern är då nedsänkt i oljan? Oljans egentliga vigt är $0{,}92$, spritens $0{,}85$.

Opløsning. Kaldes Cylindrens Højde h, Grundfladens Areal a og det Stykke af Højden, som, efterat Vinaanden er heldt paa, er nedsænket i Oljen x, har man

$$0{,}95 \, . \, ha \, . \, 0{,}92 = a \, . \, x \, . \, 0{,}92 + (h - x) \, a \, . \, 0{,}85$$

hvoraf

$$x = 0{,}34 \, . \, h.$$

4) Ett med smal hals försedt glaskärl, fyldt med torr luft, har tillika med denna uppvärmts till en viss temperatur, under det kärlmynningen hålles öppen. Vid oförändradt barometerstånd nedföres mynningen under ytan af nollgradigt kvicksilfver, och kärlet jämte luften deruti afkyles äfvenledes til 0^0, hvarvid kvicksilfverytorna inuti och utanför kärlet skola hållas i jämnhöjd med hvarandra. Om mynningen tilltäppes och kärlet upplyftes, har man på detta sätt infört i detsamma en kvicksilfvermängd, som vid 0^0 upptager $\frac{1}{6}$ af dess inre rymd. Till hvilken temperatur var kärlet uppvärmdt? Glasets utvidgningskoefficient är $0{,}000026$, luftens $0{,}003667$.

Opløsning. Kaldes Flaskens Rumfang ved 0^0 v_0, bliver:

$$\frac{v_0 (1 + 0{,}000026 \, . \, t)}{1 + 0{,}003667 \, . \, t} = \frac{5}{6} v_0$$

hvoraf:

$$t = 55^0.$$

5) Två prismer, det ena af flintglas, det andra af kronglas, äro gifna. Det förras brytande vinkel är 27^0, det senares 31^0. Prismerna ställas invid hvarandra med de sidytor, som de vända mot hvarandra, parallela och med de brytande kanterna åt motsatta håll. En ljusstråle infaller vinkelrätt mot flintglasprismats utåtvända sidoyta, och sedan den genomgått båda prismerna, lemnar den kronglasprismat i en mot utgångsytan vinkelrät riktning. Beräkna flintglasets brytningsexponent, då man vet, att kronglasets är $1{,}5$.

Opløsning. Paa en Figur ses let, at Indfaldsvinkel og Brydningsvinkel dér, hvor en Straale gaar fra det ene Prisme

til det andet, er henholdsvis 27^0 og 31^0. Kaldes det søgte Brydningsforhold n, er:

$$\frac{\sin 27^0}{\sin 31^0} = \frac{1{,}5}{n},$$

hvoraf $$n = 1{,}702$$

6) En inklinationsnål, som fritt får svänga i den magnetiska meridianen, gör 10 svängningar på 17 sekunder. Om den deremot får svänga i ett mot den magnetiska meridianen vinkelrätt vertikalplan, behöfver den 22 sekunder för att göra 10 svängningar. Beräkna häraf inklinationsvinkeln.

Opløsning. Kaldes Jordmagnetismens Intensitet I, Naalens Inertimoment m. H. t. Axen T og dens magnetiske Moment M, har man i den første Stilling

$$\frac{17}{10} = \pi \sqrt{\frac{T}{I \, . \, M}}.$$

I den anden Stilling virker kun Jordmagnetismens vertikale Komposant, som er lig I sin i, hvor i er Heldningen. Altsaa er

$$\frac{22}{10} = \pi \sqrt{\frac{T}{I \sin i \, . \, M}}.$$

Ved Divisjon faas

$$\frac{17}{22} = \sqrt{\sin i}$$

$$i = 36^0 \; 39' \; 49''.$$

7) Vid en galvanisk stapel, der det indre motståndet är 5,6 ohm, äro polerna förenade medels en 87,5 m. lång ledningstråd. Genom att förena dem medels ytterligare en ledning, bestående af samma slags tråd, vill man minska strømstyrkan i den förstnämda tråden till $\frac{1}{10}$ af den ursprungliga. Huru lång skall den nya ledningen tagas, då motståndet i 1 m. af den använda tråden är 0,04 Ohm?

Opløsning. Kaldes den indre Modstand M (= 5,6 Ohm), den ydre m = 87,5 . 0,04 og Strømstyrken s, Længden af den tilføjede Traad x^m, dens Modstand m_1 og Strømstyrken i denne Gren s_1, har man:

$$s = \frac{E}{M + m}$$

og if. Sætningerne om Strømforgrening:

$$\frac{1}{10} s + s_1 = \frac{E}{M + \frac{m \cdot m_1}{m + m_1}}$$

og

$$m \cdot \frac{1}{10} s = m_1 s_1.$$

Af disse tre Ligninger faas

$$m_1 = \frac{M \cdot m}{9 (M + m)}.$$

Altsaa er $x = \frac{m_1}{0{,}04} = \frac{5{,}6 \cdot 87{,}5}{9 \cdot (5{,}6 + 87{,}5 \cdot 0{,}04)} = 5{,}98^{m}.$

Algebraiska.

1) Logaritmen för ett tall i ett visst system förhåller sig til samma tals naturliga logaritm som $\sqrt[5]{6} : \sqrt[6]{5}$. Huru stor är basen i det förra systemet?

Opløsning. Det søgte Grundtal kaldes x. Da er

$$\frac{\log_x a}{\log_e a} = \frac{\sqrt[5]{6}}{\sqrt[6]{5}} = \frac{\log a : \log x}{\log a : \log e}$$

$$= \frac{\log e}{\log x},$$

idet log betegner Brigg's Logaritme.

$$\log x = \frac{\sqrt[6]{5} \log e}{\sqrt[5]{6}} = \frac{\sqrt[6]{5} \cdot 0{,}43429}{\sqrt[5]{6}}$$

$$= 0{,}39687$$

$$x = 2{,}4938.$$

2) Två platser A och B ligga på ett afstånd af 120 km. från hvarandra vid stranden af en kanal, längs hvilken är dragen en järnväg. Ett bantåg utgår från A i riktning mot B; dess hastighet är 36 km. i timmen. Samtidigt utgå två ångare från B åt motsatta håll, men båda med samma hastighet. Tåget möter den ena $2\frac{1}{2}$ t. förr än det upphann den andra. Huru stor är ångarnas hastighet?

Opløsning. Den søgte Hastighed x km. pr. Time. Toget antages at møde den første Damper y Timer efter Afgangen. Man har da

$$36y + xy = 120$$

og $$36\left(y + \frac{5}{2}\right) - x\left(y + \frac{5}{2}\right) = 120.$$

Elimination af y giver

$$x^2 + 96x - 36^2 = 0$$

$$x = 12.$$

3) Om i en rät kon med höjd = h och bottenradie = r inskrifves en annan rät kon, som har sin spets i medelpunkten till den förras bas och i den skärning, som går genom den gemensamma axeln, har sin sida vinkelrät mot den förras sida. Huru stor blir då dess volym?

Opløsning. Kaldes Grnndfladeradien i den indskrevne Kegle x, dens Højde y, haves til disses Bestemmelse Ligningerne

$$\frac{x}{r} = \frac{h - y}{h}$$

og $$x^2 + y^2 = rx.$$

Ved Elimination af y faas

$$(r^2 + h^2)x^2 - (2h^2r + r^3)x + h^2r^2 = 0,$$

der tilfredsstilles af x = r (ubr.) og

$$x = \frac{h^2r}{h^2 + r^2},$$

hvortil svarer $$y = \frac{hr^2}{h^2 + r^2}.$$

Det søgte Volumen

$$V = \frac{\pi}{3}x^2y = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{h^5r^4}{(h^2 + r^2)^3}.$$

4) Beräkna x i ekvationen: $\sin 13x + \sin 9x = \cos 2x$.

Opløsning. Ligningen omskrives til

$$2 \sin 11x \cos 2x = \cos 2x,$$

der deler sig i $\cos 2x = 0$ og $\sin 11x = \frac{1}{2}$.

$$2x = 90^0 + p \,.\, 180^0 \qquad 11x = \begin{cases} 30^0 + p \,.\, 360^0 \\ 150^0 + p \,.\, 360^0 \end{cases}$$

$$x_1 = 45^0 + p \,.\, 90^0. \qquad x_2 = \frac{30^0 + p \,.\, 360^0}{11}$$

$$x_3 = \frac{150^0 + p \,.\, 360^0}{11}.$$

5) Om man genom lika stora insättningar, som vid början af 21 på hvarandra följande år göres i en ränteanstalt till $4\frac{1}{2}$ % p. a. vill tillförsäkra en person en årlig inkomst af 600 kr. at utgå under 8 år från och med början af det 22:a året. Huru stora voro då insättningarna?

Opløsning. Af Ligningen

$$\frac{x}{0{,}045} \,.\, (1{,}045^{21} - 1) = \frac{600}{0{,}045} \left(1 - \frac{1}{1{,}045^8}\right)$$

findes $x = c.\ 117$

Hvert af Indskuddene var altsaa c. 117 Kr.

6) Från ett kärl, som är fyldt med 360 l. sprit, borttages en viss mängd; hvarefter det felande ersättes med vatten. Från den sålunda erhållna blandningen borttages åter samma kvantitet som förut och dessutom 84 l., hvarefter kärlet ånyo fylles med vatten. Efter den andra blandningen innehåller kärlet lika mycket vatten som sprit. Huru mycket vatten borttogs första gången?

Opløsning. Borttages første Gang x l. Sprit, er der altsaa (360 — x) l. Sprit tilbage i Karret. Anden Gang borttages (x + 84) l. af Blandingen, altsaa $\frac{(x + 84)(360 - x)}{360}$ l. af Spritten i Blandingen. Til Bestemmelse af x haves da Ligningen

$$360 - x - \frac{(x + 84)(360 - x)}{360} = 180,$$

$$x^2 - 636x + 34560 = 0$$

$$x = 60.$$

7) På en slätt ligger platsen A 2,000 m. rätt norr om platsen B. En sferisk luftballongs centrum observeras från A på 30^0 höjd öfver horisonten i ett vertikalplan, som gör en

vinkel af 50^0 med meridianen, från norr åt öster räknadt. Från B är sistnämnda vinkel blott 40^0. Beräkna ballongens höjd öfver marken samt dess afstånd från A och B.

Opløsning. Betegnes Ballonens Centrum ved T, dets Projektion paa Slettens Plan ved P, er i Trekanten ABP Vinklen $A = 130^0$, $B = 40^0$, $P = 10^0$. Altsaa

$$AP = \frac{2000 . \sin 40^0}{\sin 10^0}, \quad BP = \frac{2000 . \sin 50^0}{\sin 10^0}.$$

Dernæst er

$$AT = AP \sec 30^0, \quad PT = AP . \operatorname{tg} 30^0.$$

$$BT = \sqrt{BP^2 + PT^2}.$$

$$\log 2000 = 3{,}30103$$
$$-\log \sin 10^0 = -9{,}23967 + 10$$

$$4{,}06136$$
$$\log \sin 40^0 = 9{,}80807 - 10$$

$$\log AP = 3{,}86943$$
$$\log \sec 30^0 = 0{,}06247$$
$$\log \operatorname{tg} 30^0 = 9{,}76144 - 10$$

$$\log AT = 3{,}93190 \quad ; \quad AT = 8549^m.$$
$$\log PT = 3{,}63087 \quad ; \quad PT = 4274^m.$$
$$\log \sin 50^0 = 9{,}88425 - 10$$
$$\log BP = 3{,}94561 \quad ; \quad BP = 8823^m.$$

$$\operatorname{tg}(TBP) = \frac{PT}{BP}$$

$$\log \operatorname{tg}(TBP) = 9{,}68526 - 10$$

$$(TBP) = 25^0 50',9.$$

$$BT = BP \sec 25^0 50',9 = 9804^m.$$

Geometriska:

1) Bevisa, att midtpunkterna af alla de kordor i en cirkel, hvilkas förlängningar råkas i en punkt, ligga på en cirkelbåge.

Opløsning. Kaldes et Midtpunkt M, det faste Punkt P og Centrum O, er $\angle$ OMP $= 90^0$, flg. ligger M paa en Cirkel over OP som Diameter.

2) Att konstruera en parallelogram, då man känner skilnaden mellan två sidor, en diagonal samt att denna skall bilda rät vinkel med en sida.

Opløsning. Af Parallelogrammet ABCD kjendes BD, BC — CD og $\angle$ BDC = 90^0. Tænkes CD forlænget til E, saa at CE = CB, bliver $\triangle$ BDE umiddelbart konstruktibel, hvorefter C bestemmes som Skæringspunkt ml. ED's Forlængelse og Linien BC, der med BE danner en Vinkel = BEC. A's Bestemmelse derefter let. 1 Løsning.

3) I en punkt P af en parabel äro dragna tangenten, normalen och en perpendikel mot axeln, hvilken träffas af dessa tre linier i B, M och N respektive. Den nämnda tangenten råkar i A, tangenten i vertex O. Bevisa, att

$$\triangle ABO : \triangle PMN = BO : 2MN.$$

Opløsning. Da BO = ON, bliver OA = $\frac{1}{2}$ NP.

$$\frac{\triangle ABO}{\triangle PMN} = \frac{OA \,.\, BO}{NP \,.\, NM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BO}{NM} \cdot$$

hv. sk. bev.

4) Inskrif i en gifven triangel en rektangel af uppgifven storlek.

Opløsning. Kaldes en Side i den givne Trekant g, den tilsvarende Højde h; Siden i et Rektangel, der ligger paa g, x og Højden y, er

$$\frac{x}{g} = \frac{h - y}{h} \text{ og } xy = a^2,$$

idet a^2 er det givne Kvadrat. Man finder heraf

$$y = \frac{h}{2} \pm \sqrt{\frac{h^2}{4} - \frac{a^2 h}{g}}.$$

$z = \sqrt{\frac{a^2 h}{g}}$ konstrueres som Mellemprop. ml. $\frac{ah}{g}$ og a; $\sqrt{\frac{h^2}{4} - z^2}$ som Kathete.

Mulighedsbetingelsen er $\frac{h}{4} \geqq \frac{a^2}{g}$ eller $a^2 \leqq \frac{hg}{4}$, ɔ: det givne Kvadrat højst lig Trekantens halve Areal

I saa Fald begge Værdier for y brugelige, da begge ligge mellem o og h. Der bliver da 3 Gange 2 Løsninger.

Opgaven kan ogsaa reduceres til den: at dele en given Linie i to Dele, hvis Mellemproportional er given. Man kan nemlig let bestemme Produktet af de to Stykker, hvori en Trekantsside, paa hvilken 1 af Rektanglets Vinkelspidser ligger, deles af denne.

5) Att konstruera en cirkel med gifven medelpunkt, så att den af 2 gifna parallela linier afskär kordor, hvilkas summa är uppgifven.

Opløsning. Indføres flg. Betegnelser: Centret O, dets Projektioner paa de to parallele Linier A og B, de afskaarne Korders tilsvarende Endepunkter (ɔ: dem, der ligge til samme Side for AB) X og Y, Summen 2s — ser man let, at Midtpunktet M af XY bestemmes som Skæringspunkt ml. en Linie $\perp$ Midten af AB og en Linie $\nparallel$ AB i Afstanden $\frac{s}{2}$. Derefter er XY $\perp$ OM.

Mulighedsbetingelsen er da, at X og Y falde til samme Side for AB. I Grænsetilfældet falder X i A (eller Y i B). Er s saa lille, at X og Y falde paa forskellige Sider af AB, ville de afskaarne Korder have Differensen 2s.

Man kan ogsaa løse Opgaven ved at bestemme Cirklens Radius eller en af de afskaarne Korder og faar for denne et let konstruktibelt Udtryk.

6) En fyrhörning är inskrifven i en cirkel. Bevisa, att rektangeln af dess båda diagonaler är lika med de båda rektanglar sammantagna, som bildas af hvar och en af de två motstående sidorna.

Beviset for denne Sætning findes i enhver nogenlunde fuldstændig Lærebog i den elementære Plangeometri.

7) En punkt är tagen på en diameter i en cirkel; genom punkten är en godtycklig korda dragen och genom kordens ändpunkter tangenter till cirkeln. Bevisa, att de stycken, som dessa tangenter afskära af en rätt linie, som genom den gifna punkten drages vinkelrätt mot den gifna diametern, äro lika stora.

Opløsning. Beviset føres let ved Benyttelse af, at Tangenterne, Linien fra deres Skæringspunkt til Punktet paa Diameteren og Linien fra deres Skæringspunkt vinkelret paa Diameteren danne et harmonisk Liniebundt.

Analytisk saaledes: Cirklens Ligning $x^2 + y^2 = r^2$; Punktets Koordinater (a,o); Kordens Ligning $y = \alpha(x - a)$.

Tangenternes Røringspunkter Koordinaterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2), deres Ligninger

$$xx_1 + yy_1 = r^2$$
$$xx_2 + yy_2 = r^2.$$

Til $x = a$ skal svare modsatte y, altsaa skal

$$\frac{r^2 - ax_1}{y_1} = \frac{ax_2 - r^2}{y_2}$$

eller
$$\frac{r^2 - ax_1}{\alpha(x_1 - a)} = \frac{ax_2 - r^2}{\alpha(x_2 - a)}$$

eller
$$(r^2 + a^2)(x_1 + x_2) - 2ax_1x_2 - 2r^2a = 0.$$

Nu ere x_1 og x_2 Rødder i Ligningen

$$(1 + \alpha^2)x^2 - 2\alpha^2ax + \alpha^2a^2 - r^2 = 0,$$

saa at
$$x_1 + x_2 = \frac{2\alpha^2a}{1 + \alpha^2}; \quad x_1x_2 = \frac{\alpha^2a^2 - r^2}{1 + \alpha^2},$$

som indsatte giver en Identitet.

Danske Examensopgaver.

Almindelig Forberedelsesexamen.

Oktober 1891.

Aritmetik.

1. Forkort Brøken

$$\frac{ab(x^2 + y^2) - xy(a^2 + b^2)}{ab(x^2 - y^2) - xy(a^2 - b^2)}.$$

Opløsning. Brøken er lig

$$\frac{abx^2 - a^2xy + aby^2 - b^2xy}{abx^2 - a^2xy - aby^2 + b^2xy} = \frac{ax(bx - ay) - by(bx - ay)}{ax(bx - ay) + by(bx - ay)}$$

$$= \frac{(ax - by)(bx - ay)}{(ax + by)(bx - ay)} = \frac{ax - by}{ax + by}.$$

2. Det første Led i en Kvotientrække er 18, det tredje $\frac{1}{2}$. Find Summen af Rækken, naar den fortsættes i det uendelige.

Opløsning. Med de sædvanlige Betegnelser er

$$a = 18,\ aq^2 = \frac{1}{2};$$

altsaa

$$q^2 = \frac{1}{36} = \left(\pm\frac{1}{6}\right)^2$$

$$q = \pm\frac{1}{6}.$$

Derefter

$$s = \frac{a}{1-q} = \begin{cases} 21\frac{3}{5} \\ 15\frac{3}{7}. \end{cases}$$

3. Dersom et tocifret Tal er 7 Gange saa stort som sin Tværsum, gaar 3 op i Tallet. Bevis dette.

Opløsning. Kaldes Tallets Cifre x og y, er

$$10x + y = 7(x + y)$$

hvoraf

$$x = 2y,$$

og

$$10x + y = 21y = \text{et Multiplum af } 3.$$

hv. sk. bev.

Geometri.

1. To af Vinklerne i en Trekant ere henholdsvis 18^0 og 30^0. Find Længderne af Trekantens Sider, naar den omskrevne Cirkels Radius er r.

Opløsning. I Trekanten ABC er $\angle A = 18^0$, $\angle C = 30^0$. Iflg. bekendte Formler er da

$$BC = \frac{r(\sqrt{5}-1)}{2},\quad AB = r.$$

For at bestemme AC trækker man flg. Hjælpelinier: Diameteren $BD = 2r$, $AD = r\sqrt{3}$ og $CD = \frac{r\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$.

Ved Anvendelse af den ptolemæiske Læresætning faas derefter, at

$$AC = \frac{\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)}{4}r.$$

2. A og D ere Endepunkterne af en Diameter i en Cirkel. AB, BC og CD ere tre Tangenter til Cirklen; BC er ikke parallel med AD. Bevis, at Cirklens Radius er Mellemproportional mellem AB og CD.

Opløsning. Kaldes Centrum O, Røringspunktet for Tangenten BC T, er $\angle BOA = \frac{1}{2} \smile AT$,

$$\angle OCD = \frac{1}{2}(180^0 - \smile DT) = \frac{1}{2} \smile AT.$$

Altsaa $\triangle BOA \sim \triangle OCD$,

hvoraf flg. $\frac{BA}{OD} = \frac{OA}{CD}$, hv. sk. bev.

3. Konstruer en Trekant af en af dens Vinkler og Afstandene fra de to andre Vinklers Toppunkter til Højdernes Skæringspunkt.

Opløsning. Trekanten ABC, Højdernes Skæringspunkt O. Givet er: $\angle B$ samt OA og OC.

Af en Figur ses det let, at $\angle AOC = 180^0 - B$, hvis A og C ere spidse, men $= B$, hvis en af disse Vinkler er stump.

Konstruktionen bliver da flg.

I. $\angle B$ spids.

[1]) Man afsætter $\angle AOC = 180^0 - B$, OA og OC ud ad dens Ben. Fældes fra A og C vinkelrette henholdsvis på OC og OA; disse skære hinanden i B.

[2]) Man afsætter $\angle AOC = B$ og går iøvrigt frem som ovenfor. En Løsning faas kun, naar de to Vinkelrettes Skæringspunkt falder udenfor Vinklen AOC.

II. $\angle B$ stump.

Man afsætter $\angle AOC = 180^0 - B$ o. s. v. som før. Her maa de vinkelrette skære hinanden i Vinklen AOC, for at en Løsning med den rigtige Vinkel B skal fremkomme.

Altsaa: Er $\angle B$ spids, faas 1 eller 2 Løsninger; er $\angle B$ stump faas 1 eller 0 Løsning.

Praktisk Regning.

1. En Købmand køber 225 Tdr. Rug. Ved Rensningen, der koster ham 370 Kr., viser det sig, at 27 pro Cent af

Rugen er fordærvet og værdiløs; Resten sælger han for $18\frac{1}{2}$ Kr. pr. Tønde og tjener derved $12\frac{1}{2}$ pro Cent paa sine samlede Udgifter. Hvor meget har han givet for 1 Tønde Rug?

Opløsning. Til Salgs $\frac{225 \cdot 73}{100}$ Tdr. Rug à $18\frac{1}{2}$ Kr.

$$= \frac{225 \cdot 73 \cdot 37}{100 \cdot 2} \text{ Kr.}$$

Dette skal være lig Totaludgiften $+ \frac{12\frac{1}{2}}{100}$ af samme;

denne er altsaa $= \frac{225 \cdot 73 \cdot 37 \cdot 100 \cdot 2}{100 \cdot 2 \cdot 225}$ Kr.

Indkøbsprisen for hele Partiet $= (73 \cdot 37 - 370)$ Kr.

og pr. Td. $= 2331$ Kr. : $225 = 10$ Kr. 36 Øre.

2. Et Sandstensmonument bestaar af en Pyramide, der staar paa et Fodstykke. Dette er et retstaaende Prisme, som er 1,8764 Fod højt; dets Grundflade er en regelmæssig Sekskant, hvis største Diagonal er 1,8764 Alen lang. Pyramiden er 6 Gange saa høj som Fodstykket, og dens Grundflade dækker dets øverste Flade. Beregn Vægten af hele Monumentet (Pyramiden og Fodstykket), naar 1 Kubikfod Vand vejer 61,83 Pund, og Sandstens Vægtfylde er 2,397.

Et Prismes Rumfang er Produktet af Grundflade og Højde, en Pyramides er en Tredjedel af Grundfladens og Højdens Produkt. (Logaritmer anvendes).

Opløsning. Grundfladens største Diagonal = Diameteren i den omskrevne Cirkel = 1,8764 Alen.

Den omskrevne Cirkels Radius altsaa = 1,8764 Fod

Grundfladens Areal = 6 Centraltrekanter

$$= 6 \cdot \frac{1{,}8764^2 \sqrt{3}}{4} \text{ Kvf.}$$

$$\text{Prismets Volumen} = \frac{3 \cdot 1{,}8764^3 \cdot \sqrt{3}}{2} \text{ Kubf.}$$

$$\text{og Pyramidens Vol.} = \frac{6 \cdot 1{,}8764^3 \cdot \sqrt{3}}{2} \text{ Kubf.}$$

$$\text{Monumentets Vol.} = \frac{9 \cdot 1{,}8764^3 \cdot \sqrt{3}}{2} \text{ Kubf.}$$

og dets Vægt $= \frac{9 \cdot 1{,}8764^3 \cdot \sqrt{3} \cdot 61{,}83 \cdot 2{,}397}{2}$ ℔,
der ved Anvendelse af 5-cifrede Logaritmer udregnes til 7631,3 ℔.

Extraordinær Skolelærerexamen.

(Oktober 1891.)

Regneopgave Nr. 1. (3 Timer).

A kjøber et Parti Korn til en Pris af 87 Kr. $26\frac{2}{3}$ Øre for $8\frac{1}{4}$ Tdr., men da det tilmaales ham med $11\frac{1}{9}$ pCt. Overmaal, kommer han kun til at betale for 384 Tdr. 7 Skpr. $\frac{1}{2}$ Fdk. Kornet renses, hvorved det svinder 52 pCt. af Overmaalet, og derefter sælger A det til B paa følgende Vilkaar:

1. A skal have samme Pris for 1 Tønde med rigtigt Maal, som han selv har givet for 1 Tønde med Overmaal;
2. A skal have saa stor en Del af B's mulige Fortjeneste ved et senere Salg, at A's hele Fortjeneste (heri medregnet den Fortjeneste, han har havt ved Salget til B) bliver 50 pCt. større end B's.

B sælger Kornet saaledes, at han efter Fradrag af Omkostningerne, som udgjøre 145 Kr. 6,1 Øre, og af A's Andel i Fortjenesten, selv har en ren Fortjeneste af $11\frac{1}{9}$ pCt. af den Sum, han sælger Kornet for.

I. Hvor mange Tønder Korn fik B?
II. Hvad solgte B 1 Tønde for?
III. Hvor meget tjente A ved hvert af de 2 Salg?

Opløsning. Prisen pr. Td. $= \frac{872673}{8\frac{1}{4}}$ Øre $= 1057\frac{7}{9}$ Øre,

$384\frac{57}{64} \cdot 1057\frac{7}{9}$ Øre $= 407128\frac{3}{4}$ Øre $=$ A's Indkjøbspr.

Overmaalet $= 384\frac{57}{64} \cdot \frac{11\frac{1}{9}}{100} \cdot \frac{48}{100} = 20\frac{211}{400}$ Td.

$384\frac{57}{64} + 20\frac{211}{400} = 405\frac{669}{1600}$ Tdr. faar B. I.

$405\frac{669}{1000} \cdot 1057\frac{7}{9} = 428842\frac{17}{60}$ Øre faar A.

$-\,407128\frac{3}{4}$

$21713\frac{8}{15}$ Øre $=$ A's første

B's samlede Udsalgspris = x.

$$x - 14506{,}1 - \frac{11\frac{1}{9}}{100}x - \left(\frac{11\frac{1}{9}}{100}x \cdot \frac{150}{100} - 21713\frac{8}{15}\right) = 428842\frac{17}{60},$$

$$x - \frac{1}{9}x - \frac{1}{6}x = \frac{13}{18}x = 421634\frac{17}{20};\ x = 583802\frac{1}{10}\ \text{Øre}.$$

$$\frac{583802\frac{1}{10}}{405\frac{689}{1600}} = 1440\ \text{Øre}. \qquad \text{II.}$$

A's hele Fortjeneste $= \frac{1}{6} \cdot 583802\frac{1}{10}$ Øre $= 97300\frac{7}{20}$ Ø.

Den første $= 21713\frac{8}{15}$ —

Den anden $= 75586\frac{49}{60}$ Ø. III.

Regneopgave Nr. 2.

(2 Timer.)

A har 6000 Kr. og B 5700 Kr., som de samtidig udsætte paa Rente.

I. Hvis A udsætter sin Kapital til 4,28 pCt. p. a., B sin til 5,105 pCt. p. a., alt Rente af Rente, hvor længe vil det da vare, inden de 2 Kapitaler med Renter ere lige store?

II. Hvis begge de oprindelige Kapitaler derimod vare udsatte til 5,105 pCt. p. a., og A efter 1 Aar og fremdeles hvert følgende Aar, ialt 19 Gange, forøger sin Kapital med en lige stor Sum, hvor stor maa da denne være, for at A's Formue, 20 Aar efter, at de oprindelige Summer ere udsatte, kan være dobbelt saa stor som B's?

Opløsning. I. $6000 \cdot 1{,}0428^x = 5700 \cdot 1{,}05105^x$

$$\left(\frac{1{,}0428}{1{,}05105}\right)^x = 0{,}95;\ x = \frac{\log 0{,}95}{\log 1{,}0428 - \log 1{,}05105}$$

$$= \frac{0{,}97772 - 1}{0{,}01820 - 0{,}02162} = \frac{0{,}02228}{0{,}00342} = 6{,}5.$$

II. $2 \cdot 5700 \cdot 1{,}05105^{20} = 6000 \cdot 1{,}05105^{20} + x \cdot 1{,}05105^{19} + \ldots$

$$5105^{20} = \frac{x \cdot 1{,}05105 \cdot (1{,}05105^{19} - 1)}{0{,}05105}$$

$$x = \frac{5400 \cdot 1{,}05105^{19} \cdot 0{,}05105}{1{,}05105^{19} - 1} = \frac{275{,}67 \cdot 1{,}05105^{19}}{1{,}05105^{19} - 1};$$

$$x = 2{,}44039 + 0{,}41078 - 0{,}19728 = 2{,}65389.$$

$$x = 450{,}7.$$

Regneopgave Nr. 3.

(2 Timer.)

En ret Cylinder og en ret Kegle have samme Grundflade, hvis Diameter er = Cylinderens Højde = 7 Fod.

I. Hvis Keglen af Cylinderens modstaaende Endeflade afskærer en Cirkel, hvis Areal er = $\frac{1}{3}$ af dennes, hvor stort er da Indholdet af den Del af Keglen, som ligger udenfor Cylinderen?

II. Hvor høj er hele Keglen, hvis Rumfangene af Cylinderen og af den Del af Keglen, som er indenfor den, forholde sig som 27 til 25?

(π regnes = $\frac{22}{7}$).

Opløsning. I. $\frac{r^2}{(\frac{7}{2})^2} = \frac{1}{3}$; $r^2 = \frac{49}{4} \cdot \frac{1}{3} = 4{,}0833\ldots$; $r = 2{,}02$.

$$\frac{h}{2{,}02} = \frac{h+7}{3{,}5} = \frac{7}{1{,}48};\ h = \frac{202 \cdot 7}{148} = 9{,}55.$$

$$\text{Vol.} = \frac{1}{3} \cdot 9{,}55 \cdot \frac{22}{7} \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = 40{,}85.$$

II. $\frac{(\frac{7}{2})^2}{\frac{1}{3}(r^2 + \frac{7}{2} r + (\frac{7}{2})^2)} = \frac{27}{25}$; $r^2 + \frac{7}{2} r = \frac{49}{4} \cdot 25 \cdot \frac{3}{27} - \frac{49}{4} = \frac{196}{9}$

$$r = -\frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{196}{9} + \frac{49}{16}} = -1{,}75 \pm 4{,}98 = 3{,}23.$$

$$\frac{h}{3{,}5} = \frac{h-7}{3{,}23} = \frac{7}{0{,}27};\ h = \frac{3{,}5 \cdot 7}{0{,}27} = 90{,}74.$$

Opgave i geometrisk Tegning.

Med en Side lig en 12. Del af Tegnepapirets korte Side tegnes midt paa Papiret en regelmæssig Tikant. Hver af dennes Sider gjøres til Side i en udenfor Tikanten liggende regelmæssig Sexkant (altsaa 10 Sexkanter), og den hver af disse Sexkanter, der er fjernest fra Tikantens M

gjøres til Side i en udenfor Sexkanten liggende regelmæssig Femkant (altsaa 10 Femkanter). Med Centrum i hver Sexkants Midtpunkt tegnes en Cirkel gjennem den (i Forhold til dette Midtpunkt) nærmeste Femkants fjerneste Vinkelspids (altsaa 10 Cirkler).

Tikanten trækkes op med tyk Linie, Femkanterne og Cirklerne med tynd Linie, og Sexkanternes tilbageværende Sider punkteres.

Løste Opgaver.

101. I en Trekant ABC trækkes fra Midtpunkterne af AB og AC Vinkelrette paa AC og AB resp., samt en Linie fra Midtpunktet af BC gjennem de trukne Liniers Skæringspunkt. Vis, at denne staar vinkelret paa den omskrevne Cirkels Tangent gjennem A.

Opløsning. Lad D, E og F være Midtpunkterne af henholdsvis AB, BC og CA, P det Punkt, hvor DP $\perp$ AC og FP $\perp$ AB skære hinanden, og O den omskrevne Cirkels Centrum. Da er

$$EF \not\equiv AD,\ OD \neq PF,\ OF \neq PD,$$

hvoraf følger

$$OF = PD,\ \angle OFE = \angle PDA,\ \triangle OFE \cong \triangle PDA,$$

og heraf atter

$$\angle OEF = \angle PAD,\ OE \not\equiv PA;$$

da OEPA saaledes er et Parallelogram, har man

$$EP \neq OA \perp \text{Tangenten i A.}$$

(J. C. Carlsen.)
(Ogsaa løst af Herm. Olsen.)

102. I en Trekant trækkes Linier fra Sidernes Midtpunkter vinkelret paa den omskrevne Cirkels Tangenter gjennem de m[illegible] Vinkelspidser. Vis, at de tre Linier gaa gi[illegible] ınkt.

Opløsning. Trekanten være ABC, D, E og F Midtpunkterne af henholdsvis AB, BC og CA, P Skæringspunktet for Linierne fra D og F vinkelrette paa Tangenterne i C og B, og O Cirklens Centrum. Da er

$$FD \neq BC,\ FD = \tfrac{1}{2}BC,\ DP \neq CO,\ PF \neq OB,$$

hvoraf $\triangle FDP \sim \triangle BCO,\ DP = \tfrac{1}{2}CO;$

endvidere er $ED = \tfrac{1}{2}AC,\ ED \neq AC,$

altsaa $\triangle EDP \sim \triangle ACO,\ \angle PED = \angle OAC,$

$$EP \neq OA \perp \text{Tangenten i A},$$

hvorved Sætningen er bevist.

(J. C. Carlsen.)
(Ogsaa løst af Herm. Olsen.)

103. P er et fast Punkt i en ligesidet Hyperbel, A og B Endepunkterne af en bevægelig Diameter.

Find det geometriske Sted for Centret af $\triangle$ APB's omskrevne Cirkel.

Opløsning. Hyperblens Axer tages til Koordinataxer paa sædvanlig Maade. Har P Koordinaterne m og n, A Koordinaterne x_1 og y_1, blive Ligningerne for de Vinkelrette paa Midten af AP og AB

$$y - \frac{y_1 + n}{2} = -\frac{m - x_1}{n - y_1}\left(x - \frac{x_1 + m}{2}\right)$$

og $$y = -\frac{x_1}{y_1}.x,$$

endvidere er

$$y_1^2 = x_1^2 - a^2,$$

og $$n^2 = m^2 - a^2;$$

elimineres x_1 og y_1 heraf, faas Ligningen for det søgte Sted

$$y^2 - x^2 = ny - mx,$$

eller $$\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{n}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2;$$

en ligesidet Hyperbel.

(J. C. Carlsen.)
(Ogsaa løst af Herm. Olsen.)

104. Find Ligningen for den Cirkel, der gaar gennem Fodpunkterne af de 3 Normaler, der kunne trækkes fra et givet Punkt til en given Parabel.

Opløsning. Er Parablens Ligning

$$y^2 = px,$$

og Normalernes Fodpunkter (ξ,η), har Normalen Ligningen

$$y - \eta = -\frac{2\eta}{p}(x - \xi);$$

da Normalen indeholder et givet Punkt (a,b), er (ξ,η) bestemt ved Ligningerne

$$b - \eta = -\frac{2\eta}{p}(a - \xi)$$

og

$$\eta^2 = p\xi;$$

elimineres ξ, faas

$$\eta^3 + \frac{p^2 - 2ap}{2}\eta - \frac{p^2b}{2} = 0. \qquad (1.)$$

Cirklen, hvis Ligning være

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2,$$

indeholder ogsaa Punktet (ξ,η); man har da

$$(\xi - m)^2 + (\eta - n)^2 = r^2,$$

elimineres ξ, faas

$$\eta^4 + (p^2 - 2mp)\eta^2 - 2p^2n\eta + p^2(m^2 + n^2 - r^2) = 0. \quad (2.)$$

Ligningerne (1) og (2) maa have 3 Rødder fælles; divideres (2) med (1), faas Resten

$$\left(p^2 - 2mp - \frac{p^2 - 2ap}{2}\right)\eta^2 - \left(2p^2n - \frac{p^2b}{2}\right)\eta + p^2(m^2 + n^2 - r^2),$$

man har da

$$p^2 - 2mp - \frac{p^2 - 2ap}{2} = 0, \; 2p^2n - \frac{p^2b}{2} = 0,$$

$$p^2(m^2 + n^2 - r^2) = 0,$$

hvoraf findes

$$m = \frac{p + 2a}{4}, \; n = \frac{b}{4}, \; r^2 = m^2 + n^2.$$

Cirklens Ligning er altsaa

$$\left(x - \frac{p + 2a}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{4}\right)^2 = \left(\frac{p + 2a}{4}\right)^2 + \left(\frac{b}{4}\right)^2.$$

Cirklen gaar gennem Parablens Toppunkt, hvilket ogsaa fremgaar af Lign. (1) og (2), da den fjerde Rod i (2) bliver Nul.

(J. C. Carlsen.)

(Ogsaa løst af T. Bonnesen og Herm. Olsen.)

105. Bevis at

$$\pi = 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 \ldots}}}$$

naar n, der betyder Antallet af Rodtegn, vokser uden Grænse.

Opløsning. Man har

$$k_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

$$k_{16} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}},$$

ved Induktion findes let

$$k_{2^{n+1}} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 \ldots}}} \text{ (n Rodtegn)};$$

Omkredsen af 2^{n+1}-kanten

$$p = 2^{n+1} . r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 \ldots}}}$$

$$\frac{p}{2r} = 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 \ldots}}};$$

voxer n uden Grænse, bliver p = Cirkelperiferien, altsaa

$$\frac{p}{2r} = \pi.$$

(J. C Carlsen.)
(Ogsaa løst af Herm. Olsen.)

Opgaver til Løsning.

107. Trækker man fra Hjørnespidserne i et Tetraeder ABCD, hvis Sideflader ere ligestore, gennem et indvendigt beliggende Punkt P Linier, der skære de modstaaende Sideflader i A', B', C', D', saa er

$$\frac{PA'}{AA'} + \frac{PB'}{BB'} + \frac{PC'}{CC'} + \frac{PD'}{DD'} = 1.$$

Dette ønskes bevist.

108. For hvilke Værdier af s blive Ligningerne

$$\frac{x_1}{x_2 + 1} = \frac{x_2}{x_3 + 1} = \ldots = \frac{x_{n-1}}{x_n + 1} = \frac{x_n}{x_1 + 1}$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = s$$

ubestemte?

109. Hvormange Linier kan der trækkes gennem to Cirklers ene Skæringspunkt saaledes at de afskærer lige lange Buer af Cirklerne? Hvorledes maa Forholdet mellem de to Cirklers Radier være beskaffent, for at disse Linier skal kunne konstrueres ved Passer og Lineal for enhver Værdi af den Vinkel, hvorunder Cirklerne skære hinanden? —

(108—109 af E. C. Valentiner.)

En Bemærkning.

Den i Korrespondancen i forrige Hefte Side 136 omtalte Opgave kan også løses saaledes:

$(a + b)$ findes i saa mange Udtryk, som man kan danne af $(c + d)$ $(e + f) \ldots$; dette Antal ville vi kalde A_{2n-2}; $(a + b)$, $(a + c)$, $(a + d)$, ... findes i lige mange Udtryk; man faar da det søgte Antal

$$A_{2n} = (2n - 1) A_{2n-2} = (2n - 1)(2n - 3) A_{2n-4}$$
$$\ldots = (2n - 1)(2n - 3) \ldots 5 \cdot 3 \cdot A_2$$
$$= \frac{[2n]}{2^n \cdot [n]}.$$

(Adolf Lomholt.)

Korrespondance.

Gives der nogen fuldstændig Lærebog i Astronomi enten paa Tysk eller et af de nordiske Sprog? Pris? A. N.

Svar: [1]) Mohn og Geelmuyden: Elementær Lærebog i Astronomi.
[2]) Klinkerfues: Theoretische Astronomie.

Prisen faar De at vide ved Henvendelse til en Boghandel, f. Ex. i Christiania.

Rettelser og Tilføjelser.

Side 70, Linie 7 f. o., Opgave 2, $z_r - 2$ læs $z_r - 1$.
Tilføjelse til denne Opgave: Er $a_0 = 0$, bliver
$$\frac{y_r}{y_{r-1}} = (a_r a_{r-1} \ldots a_1).$$
Side 71 L. 8 f. o. $\frac{\pi}{3}$ læs $\frac{\pi}{6}$.
» » » » $\frac{7\pi a^3}{48}$ læs $\frac{7\pi a^3}{96}$.
» » » 11 » $\frac{3\pi a^3}{32}$ læs $\frac{\pi a^3}{48}$.
Side 136. Opgaverne 101 og 102 ere stillede af Hr. P. A. Larsen.
— L. 16 f. o. efter Linie L tilføjes gennem C.
— nederste Linie $[2]^{2n}$ læs $[2]^n$.

Nyt

Tidsskrift for Mathematik.

Redigeret

af

cand. mag. **P. T. Foldberg** og dr. phil. **C. Juel.**

Afdeling B.

Anden Aargang.

Kjøbenhavn.

Ludvig Jørgensens Bogtrykkeri. Amagertorv 10.

1891.

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY
88283
ASTOR, LENOX AND TILDEN FOUNDATIONS
THE ASTOR LIBRARY

Indhold.

Side

A. S. Bang, Cand. mag.
Om Primtal af bestemte Former 73
P. Heegaard, stud. mag.
(Sé løste Opgaver).
J. L. W. V. Jensen, Ingeniør.
Udvidelse af en Sætning af Tchebycheff 1
Gammafunktionens Theori i elementær Fremstilling I, II. 33, 57, 83
(Sé desuden Opgaver til Løsning).
C. Juel, dr. phil.
Note til en Konstruktion af Newton 3
Et geometrisk Bevis for Vivianis Theorem 6
Et analytisk-geometrisk Bevis for de trigonometriske Funktioners Additionstheorem 31
Nogle Fortegnsbemerkninger 94
H. Valentiner, Dr. phil., Lærer ved Officersskolen.
(Sé Literaturanmeldelse).

Løste Opgaver.

7, (P. Heegaard) 94

Opgaver til Løsning.

19, (J. L. W. V. Jensen) 56
20, 21 (do.) 94

Examensopgaver.

Skoleembedsexamen i Mathematik (1890) 8, 17, 23
Polyteknisk Examen (Januar 1891) 27, 28
Partiel Examen ved Polyteknisk Læreanstalt. (Septbr. 1891) 89
Afgangsprøven for Søofficersskolen (1891) 86

Literatur.

Side

C. Crone: Nogle Hovedsætninger af Funktionslæren og de algebraiske Ligningers Theori til Brug for Søofficersskolens ældste Klasse. (H. Valentiner). 85

Mathematisk Forening 56

Rettelser 32, 84

Udvidelse af en Sætning af Tchebycheff.

(Af J. L. W. V. Jensen.)

Da Opgave Nr. 557, som jeg har stillet i T. f. M. (5te R., 5te B., 1887), og som forlanger et Bevis for følgende Sætning:

Naar U, V og W ere endelige, positive og integrable Funktioner af x i det reelle Interval a...b, og endvidere U og V : W ingensinde voxe for voxende x, er

$$\int_a^b U\,V dx : \int_a^b V dx > \int_a^b U\,W dx : \int_a^b W dx, \text{*)}$$

ikke er bleven løst, skal jeg tillade mig at reproducere det meget simple Bevis efter en lille Note i Bull. des. sc. math. (Juni 1888).

Det er indlysende, at den anførte Sætning er et specielt Tilfælde af følgende:

Naar $u_1, u_2, \ldots$; $v_1, v_2, \ldots$; $w_1, w_2, \ldots$ ere tre Rækker af positive Størrelser af den Beskaffenhed, at

$$u_1 \geqq u_2 \geqq u_3 \geqq \ldots, \text{ og } \frac{v_1}{w_1} \geqq \frac{v_2}{w_2} \geqq \frac{v_3}{w_3} \geqq \ldots,$$

vil

$$\sum_1^n u_\nu v_\nu : \sum_1^n v_\nu > \sum_1^n u_\nu w : \sum_1^n w_\nu.$$

---

*) Naar to Funktioner ere endelige og integrable, er deres Produkt det ogsaa, hvilket følger som specielt Tilfælde af en meget omfattende Sætning af Paul du Bois-Reymond. Uden denne Tilføjelse kunde det se ud, som om Fr[illegible]ingerne vare altfor almindeligt affattede.

Bevis. Naar vi sætte $s_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$, $\sigma_n = w_1 + w_2 + \ldots + w_n$, og bemærke, at Ulighederne

$$\sigma_n s_1 \geqq s_n \sigma_1, \quad \sigma_n s_2 \geqq s_n \sigma_2, \ldots,$$

og derfor ogsaa

$$\frac{s_1}{s_n} \geqq \frac{\sigma_1}{\sigma_n}, \quad \frac{s_2}{s_n} \geqq \frac{\sigma_2}{\sigma_n}, \ldots,$$

ere en umiddelbar Følge af Uligheden

$$w_q v_p \geqq v_q w_p, \quad \text{for } q > p,$$

som atter følger af de i Sætningen forudsatte, saa er

$$\sum_1^n u_\nu v_\nu : \sum_1^n v_\nu = \sum_1^n \frac{s_\nu}{s_n}(u_\nu - u_{\nu+1}) + u_{n+1}$$

$$> \sum_1^n \frac{\sigma_\nu}{\sigma_n}(u_\nu - u_{\nu+1}) + u_{n+1} = \sum_1^n u_\nu w_\nu : \sum_1^n w_\nu,$$

h. s. b.

Sætte vi i den første Sætning henholdsvis $W = 1$, eller $V = 1$ og V for W, findes Tchebycheff's Sætning (Hermite: Cours professé pend. le 2e sem. 1881—82) som specielt Tilfælde:

Naar U og V ere positive Funktioner af x, som i Intervallet a...b ere stedse aftagende for voxende x, er

$$(b - a)\int_a^b UV\,dx > \int_a^b U\,dx \,.\, \int_a^b V\,dx;$$

er derimod den ene Funktion aftagende, den anden voxende, saa er

$$(b - a)\int_a^b UV\,dx < \int_a^b U\,dx \,.\, \int_a^b V\,dx.$$

Ved Ombytning af Grænserne ses let, at man kan ombytte »aftagende« med »voxende« i den første Del af Sætningen.

F. Franklin har bevist denne specielle Sætning (American Journal of Mathematics, B. VII) paa følgende elegante Maade.

Med let forstaaelige Betegnelser er

$$\int_a^b\int_a^b (U_x - U_y)(V_x - V_y)\,dx\,dy$$

$$= (b - a)\int_a^b U_x V_x\,dx + (b - a)\int_a^b U_y V_y\,dy$$

$$- \int_a^b U_x\,dx \,.\, \int_a^b V_y\,dy - \int_a^b V_x\,dx \,.\, \int_a^b U_y\,dy$$

$$= 2\left((b-a)\int_a^b UV\,dx - \int_a^b U\,dx \,.\, \int_a^b V\,dx\right),$$

hvoraf Sætningen umiddelbart følger, idet venstre Side af denne Ligning henholdsvis er positiv eller negativ i de to Tilfælde. Franklin har gjort en Del nærliggende Anvendelser af Sætningen paa Integraler, særlig elliptiske af Formen $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, Euler'ske, o. s. v., hvortil den udvidede Sætning naturligvis endnu bedre egner sig. Anvendelserne overlades til Læseren.

Note til en Konstruktion af Newton.

(Af C. Juel.)

Der findes i Newtons principia mathematica philosophiae naturalis, liber primus, lemna XXII under Titlen: figuras in alias ejusdam generis figuras mutare, en Konstruktion af tilsvarende Punkter i to projektive Figurer, der i flere Henseender har Interesse. Dette ligger ikke just deri, at Newton overhovedet benytter sig af projektive Figurer, thi uden at gaa længere tilbage i Tiden, behøver man jo blot at tænke paa, at Desuarges og Paskal have gjort ikke ringe Anvendelser af Projektion til Bevis for Sætninger. Derimod kan selve den ved første Øjekast noget besynderlige Anvisning til Konstruktionens Udførelse nok være paafaldende, og man sér ogsaa, at den har vakt Chasles' Opmærksomhed. Den Reproduktion, denne giver af Newtons Tankegang, er nu saa simpel og naturlig, at der i Virkeligheden her ikke kan være noget at tilføje. Han bemærker nemlig, at man meget let ledes til Konstruktionen ved først at tænke sig de to Figurer liggende hver i sin Plan og dernæst paa en bestemt Maade at dreje den ene Figur ind i den andens Plan. *)

*) Sé, Chasles, aperçue historique, Note XIX.

Den lille Tilføjelse, jeg har at gjøre, er blot den, at man ved en meget lille Ændring faar en saa simpel mekanisk Konstruktion af tilsvarende Punkter i to projektive Figurer i deres almindeligste indbyrdes Beliggenhed, at den ikke er overgaaet eller blot naaet af nogen senere; særlig er dette paafaldende, naar to af Dobbeltpunkterne ere imaginære.

Newtons Konstruktion er følgende:

I en Plan er fastlagt to rette Linier BX og BY, et Punkt O samt en bestemt Retning U. For at finde det tilsvarende til et vilkaarligt Punkt P af Planen, drages PM parallel med BY, til den skjærer BX i M, dernæst OM, der skjærer BY i et Punkt M_1, og endelig Linien M_1P_1 i den givne Retning U saaledes, at Længden bestemmes ved

$$\frac{MP}{OM} = \frac{M_1P_1}{OM_1}. \qquad (1)$$

Newtons ganske kort førte Redegjørelse for den herved bestemte Transformation er i det væsentlige den selvsamme, som den, der nutildags ret naturlig vilde føres i en elementær analytisk geometrisk Fremstilling. Der vælges nemlig to passende Linier til Axer i et Parallelkoordinatsystem for Systemet af Punkter P og dernæst to andre passende Linier til Koordinataxer for Systemet af Punkter P_1. Derpaa vises det, at Koordinaterne til P_1 udtrykkes lineært (men under brudden Form) ved Koordinaterne til P.

Transformationen anvendes saa i det følgende til ved Keglesnitskonstruktioner at bringe visse Linier til at falde uendelig fjernt og lignende; det kan bemærkes, at han, naar han har Brug for at transformere en Hyperbel til en Cirkel, dog altid (og dengang ret naturlig) gjør dette i to Skridt, idet Kurven først transformeres til en Ellipse.

Den lille Ændring ved Newtons Konstruktion, jeg før antydede, bestaar nu deri, at Relationen (1) erstattes med

$$\frac{MP}{OM} = k \cdot \frac{M_1P_1}{OM_1},$$

hvor k er en vilkaarlig Konstant. At man derved virkelig

faar den almindeligste Beliggenhed af to projektive Figurer indbyrdes, skal vises derved, at vi omvendt ville gaa ud fra to saadanne Figurer og derfra ledes tilbage til den ændrede Newtonske Konstruktion. De to Figurer antages at være hverken homologe eller affine — at man ogsaa kan danne disse ved Konstruktionen ses let direkte. I Figurerne vil der da findes tre Punkter, der svare til sig selv, Dobbeltpunkterne A, B og C, og forudsættes Figurerne at være reelle, maa mindst det ene Punkt B af disse være reelt; Forbindelseslinien b mellem de to andre Dobbeltpunkter maa da ogsaa være reel. Lad endvidere v_1 og u være Retningslinierne d. v. s. de to Linier, der svare til Planens uendelig fjerne Linie eftersom denne henregnes til den ene eller den anden af de to Figurer Σ og Σ_1. Gjennem B drage vi en Linie BY parallel med Retningslinien u og bestemme BX som den Linie i Σ, der svarer til BY opfattet som Linie i Σ_1. Rækkerne af tilsvarende Punkter M og M_1 paa BX og BY ville da ligge perspektivisk med Hensyn til Skjæringspunktet O mellem u og b som Perspektivcentrum; Punktet B vil nemlig svare til sig selv og Punktet (b . BX) til (b . BY) og Punktet (u . BX) til dets uendelig fjerne Punkt af BY. Man kan nu let finde det tilsvarende Punkt P_1 til et vilkaarligt Punkt P af den første Figur. Drages nemlig en Linie PM parallel med BY, der skjærer BX i M, og projiceres M fra O ind paa BY i M_1, vil den tilsvarende Linie til PM gaa gjennem M_1 og være parallel med v_1, thi det uendelig fjerne Punkt af PM (d. v. s. af u) maa svare til det uendelig fjerne Punkt af v_1. Drages endvidere Linien OP, der skjærer BY i S_1, vil Linien S_1P_1 være parallel med b, thi O svarer til det uendelig fjerne Punkt af b.

Ved ligedannede Trekanter udledes nu let af Figuren, at Forholdet

$$\frac{MP}{OM} : \frac{M_1P_1}{OM_1}$$

er konstant, men for Konstruktionens Skyld er det utvivlsomt

bedst at holde sig til ovennævnte Bestemmelse, der i alle Tilfælde kun kræver 5 Linier, nemlig:

$$PM,\ OMM_1,\ OPS_1$$

samt $S_1P_1 \neq b$ og $M_1P_1 \neq v_1$.

I Reglen opnaas der ganske vist ikke meget ved i en væsentlig theoretisk Undersøgelse at søge et mekanisk simpelt Skema til Udførelse af Konstruktionerne. Af og til letter det dog Overblikket; man sér saaledes let, at det væsentlige i ovenstaaende Konstruktion ogsaa kan udtrykkes ved, at en vilkaarlig lineær Transformation er sammensat af en affin og en perspektivisk Transformation. Den viser tillige, at Sammensætningen (i denne Orden), naar en lineær Correlation (PP_1) er givet — hvor Punkternes Orden heller ikke skal regnes for ligegyldig — kun er mulig paa tre Maader, af hvilke kun én er reel, naar Figurerne kun have ét reelt Dobbeltpnnkt.

Denne Sætning henhører til dem, paa hvilke man kan anvende Dualitetspricipet. Man faar derved følgende Sætning, som jeg ikke erindrer at have sét før:

Haves to indbyrdes projektive Figurer Σ og Σ_1, kan man paa uendelig mange Maader bestemme en ny Figur Σ_2, der er i perspektivisk Beliggenhed til begge de givne, saaledes at det ene Perspektivcentrum kan vælges i et vilkaarligt Punkt af en af Dobbeltlinierne. Til hvert Valg svarer to Figurer Σ_2.

Et geometrisk Bevis for Vivianis Theorem.

(Af C. Juel.)

Lad OA, OB, OC være tre paa hinanden vinkelrette Radier i en Kugle. Over OA som Diameter beskrives en Halvcirkel, der ligger i Planen AOB og i Vinkelrummet AOB. Vivianis Theorem gaar da ud paa, at den Rumkurve, hvori

Kuglen skjæres af en Cylinder, der har den nævnte Halvcirkel til Ledelinie og OC til Frembringerretning deler Kugleoktanten ABC i to Dele, hvis Arealer faa simple Udtryk.

I det følgende forudsættes Radien OC lodret.

Lad nu M være et Punkt af Rumkurven, M_1 dets Projektion paa den vandrette Storcirkelplan AOB. Vinklen AOM_1 være lig v, og lad Kugleradien gjennem M_1 skjære Kugleoktanten i N. Da er

$$\triangle\, OAM_1 \cong OMM_1$$

altsaa $\angle\, NOM = AON = v,$

hvoraf $\angle\, COM = 90^0 - v = BON.$

Heraf følger atter

$$\triangle\, COM \cong BON,$$

altsaa $CM = BN.$

Nu lægges gjennem O, C og M en Diametralplan og dernæst gjennem OC en ny Plan uendelig nær ved den første, der skjærer Rumkurven i M' og Storcirklen ANB i N'. Lad Vinklen mellem disse to Planer være ω. Det sektorformede sfæriske Areal MCM' kan da med Bortkastelse af en Størrelse, der er forsvindende i Forhold til det medtagne, beregnes som en lille Sektor af en Kuglekalot, der begrændses af en Lillecirkels Bue (Centrum i C) og to sfæriske Storcirkelbuer, der indbyrdes danne Vinklen ω. Efter en bekjendt Sætning om Arealet af en Kuglekalot, vil Arealet af det nævnte Fladeelement være

$$\frac{\omega}{2\pi}\pi\, CM^2 = \frac{1}{2}\omega\,.\,CM^2 = \frac{1}{2}\omega\,.\,BN^2.$$

Men Arealet NBN' af et Element af den vandrette Storcirkel begrænset af Buen NN' og to Korder BN og BN' vil ligeledes med Bortkastelse af en Størrelse, der er forsvindende i Forhold til det medtagne, være $\frac{1}{2}\,.\,BN^2\,.\,\frac{\omega}{2} = \frac{1}{4}\omega\,.\,BN^2$.

Summeres nu alle Arealelementerne NBN', idet man begynder i B, faas Arealet af Cirkelafsnittet BN. Vi have altsaa fundet følgende Sætning:

Lægger man gjennem Endepunktet af den lodrette Diameter en vilkaarlig Storcirkel, der skjærer den vandrette Storcirkel AB i N, vil det Areal paa Kugleoktanten, der fuldstændig begrænses af et Stykke af Rumkurven og et Stykke af den førstnævnte Storcirkel, være dobbelt saa stort som Arealet af Cirkelafsnittet BN.

Vil man have selve de to Arealer, hvori Oktanten deles af Rumkurven, maa man lade N falde i A, og faar da, at det ene Stykke er lig det dobbelte af Segmentet AB, det andet det dobbelte af Trekanten AOB eller lig Kvadratet paa Kuglens Radius. Det sidste er Vivianis Theorem i dettes sædvanlige Form.

Examensopgaver.

I. Skoleembedsexamen i Mathematik.

Skriftlige Opgaver.

Fysik.

a) Vægtskaalen.

b) Jordmagnetismen.

Astronomi.

Gjør Rede for Forskjellen mellem Middeltid og sand Soltid.

Efter Almanaken er Solens Kulminationstid

1889 Dec. 2:	11 t. 49 m. 43 s.	1890 Jan. 11:	12 t. 8 m. 14 s.
— 12:	11 t. 54 m. 3 s.	— 21:	12 t. 11 m. 37 s.
— 22:	11 t. 58 m. 58 s.	— 31:	12 t. 13 m. 43 s.
1890 Jan. 1:	12 t. 3 m. 53 s.	Febr. 10:	12 t. 14 m. 28 s.

Hvad skal da et Uhr vise, naar det efter sand Soltid er 7. Januar 1890 Kl. 6 E. M.

Mathematik.

I. At angive og bevise den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at man af Ligningen

$$du = Mdx + Ndy,$$

hvor M og N ere Funktioner af x og y, kan bestemme u som en Funktion af disse Variable.

I Ligningen

$$du = \left(\frac{y}{x} + z\right) dx + \left(\frac{x}{y} - z\right) dy$$

skal z være en Funktion af x og y. Bestem den saaledes, at u ogsaa bliver det, og find da u.

II. Naar et Keglesnit er omskrevet om en Trekant abc, ønskes det bevist, at de tre Linier, som forbinde en Vinkelspids (a, b eller c) med Skjæringspunktet a_1, b_1 eller c_1 mellem Tangenterne i de to andre Vinkelspidser, gaa gjennem samme Punkt p. Hvilken Forbindelse er der mellem Punkterne a, a_1, p og aa_1's Skjæringspunkt med bc.

Find Keglesnittenes Indhyllingskurve, naar Trekanten abc ligger fast, medens p bevæger sig paa et givet Keglesnit, som selv er omskrevet om Trekant abc. Hvilke Særegenheder har Indhyllingskurven i a, b og c. Bestem dens Tangenter i disse Punkter; find dens Plückerske Tal og dens Slægt.

Undersøgelsen ventes udført ad analytisk Vej, (hvortil Trekantskoordinater ere hensigtsmæssige), men hvor et Resultat følges umiddelbart af en bekjendt Sætning bør dette dog tillige bemærkes.

III. Ved hvilke Ligninger bestemmes Bevægelsen af en Partikel paa en fuldkommen glat Flade, naar Partiklen ikke er underkastet anden Kraft end Fladens Reaktion?

Hvilke almindelige Sætninger om Hastigheden og Banen gjælder ved en saadan Bevægelse.

Bestemmelsen af Bevægelsen reduceres til Kvadratur i det Tilfælde, hvor den givne Flade er Vindelfladen $y = x \operatorname{tg} \frac{z}{a}$.

IV. Hvilke Værdier kan $\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}$ antage, naar Integrationen foretages langs en saadan lukket Kurve i

den Plan, som fremstiller Værdierne af x, at $\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$ ved Tilbagekomsten til Udgangspunktet har samme Værdi, som den, hvormed den begyndte. (Cauchys Sætning om saadanne Integraler fordres ikke bevist).

Chemi.

En Analyse

Løsning af Opgaven i Astronomi. *)

Den sande Soltid, Solens Timevinkel, er ikke et jevnt med Tiden voxende Tal. Den bestemmes nemlig som Differensen mellem den næsten jævne Stjernetid Θ og Solens Rektasension R:

$$T_s = \Theta - R.$$

Men selv om Solens Bevægelse i Længde L paa Ekkliptika var jevn, vilde Rektasensionen som bestemt ved

$$\tang R = \tang L \cos \varepsilon$$

blive ujevn ogsaa uden Hensyn til, at Ekkliptikas Heldning ε ikke er strengt konstant.

Nu er Solens Længde under Antagelse af Bevægelsen i en Ellipse bestemt gjennem den excentriske Anomali E ved Tiden t, saaledes at

$$\tang \tfrac{1}{2}(L - C) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tang \tfrac{1}{2} E$$

$$E - e \sin E = n(t - t_0),$$

den Kepplerske Ligning; og den heraf følgende Ujevnhed ophæver ikke den forrige. Imidlertid voxer dog $n(t - t_0)$ og R saavel som L og E samtidig med samme hele Multipla af 360^0, og ved passende Valg af en konstant Addend C kan Forskjellen mellem R og $n(t - t_0) + C$ holdes nede under ca. 15 Minuter i Tid. I

$$T_m = \Theta - (n(t - t_0) + C)$$

har man derfor et med Tiden jevnt voxende Tal, som paa ingen Tid af Aaret afviger saa stærkt fra den sande Soltid,

*) Hvor intet andet bemærkes, ere Løsningerne os velvilligst tilstillede af Opgavestillerne.

at Forskjellen kan faa Betydning for det daglige Liv, og dette T_m anvendes derfor efter Regulering af de smaa Ujevnheder fra Perturbationerne under Navn af Middeltid som det almindelige Maal for Tiden.

I Almanaken findes Forskjellen mellem T_s og T_m angivet ved den Middeltid, paa hvilken Solen kulminerer, og hvor altsaa $T_s = 0$.

I den efter Almanaken opgivne Tabel over Kulminationstider er Argumentet altsaa sand Soltid, Funktionen er efter Fradrag overalt af 12 Timer lig med $T_m - T_s$. Regnes Argumentet ud fra 1. Januar som Nulværdi og med 10 Døgn til Enhed, svarer den omspurgte Tid, den 7. Januar Kl. 6, altsaa til Argumentet 0.625 i følgende omskrevne og med Differenser udstyrede Tabel:

Arg.	$T_m - T_s$	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
−3	-617^s					
		$+260^s$				
−2	−357		$+35^s$			
		+295		-35^s		
−1	−62		0		$+1^s$	
		+295		−34		$+9^s$
0	+233		−34		+10	
		+261		−24		−5
1	+494		−58		+5	
		+203		−19		+10
2	+697		−77		+15	
		+126		−4		
3	+823		−81			
		+45				
4	+868					

Almindelig svarer der til et Argument x i Nærheden af 0

$$T_m - T_s = 233^s + \frac{x}{1}\left(261^s + \frac{x-1}{2}\left(-34^s + \frac{x+1}{3} - 24^s..\right)\right);$$

indsættes heri $x = 0.625 = \frac{10}{16}$, findes

$$T_m - T_s = 402^s = 6^m\,42^s,$$

og da

$$T_s = 6^t\,0^m\,0^s,$$

$$T_m = 6^t\,6^m\,45^s.$$

Løsning af Opgaverne i Mathematik.

I. For at Udtrykket for du i Exemplet skal være et exakt Differential, kræves at

$$\frac{1}{x} + \frac{dz}{dy} = \frac{1}{y} - \frac{dz}{dx}.$$

Integration af denne partielle Differentialligning giver

$$z = l\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi(x - y),$$

hvor φ er en arbitrær Fnnktion. Efter Indsættelse i Udtrykket for du faas ved Integration

$$u = (x - y)\,l\left(\frac{y}{x}\right) + x + y + \psi(x - y),$$

idet vi have sat $\int \varphi dt = \psi(t)$, som, da den bliver en arbitrær Funktion, kan antages at indeholde Integrationskonstanten.

II. Tages abc til Koordinattrekant, bliver et omskrevet Keglesnits Ligning

$$\lambda x_2 x_3 + \mu x_3 x_1 + \nu x_1 x_2 = 0. \qquad (1)$$

Tangenterne i Vinkelspidserne faa Ligningerne

$$\mu x_3 + \nu x_2 = 0, \quad \nu x_1 + \lambda x_3 = 0, \lambda x_2 + \mu x_1 = 0. \qquad (2)$$

Af de to sidste, hvis Skjæringspunkt er a_1, udledes $\mu x_3 - \nu x_2 = 0$, som maa være Ligningen for aa_1. Af denne og de paa samme Maade dannede Ligninger for bb_1 og cc_1 ses, at disse Linier gaa igjennem Punktet med Koordinaterne $\lambda : \mu : \nu$; dette er det, som i den stillede Opgave er kaldt p. At de tre Linier gaa gjennem samme Punkt, følger iøvrigt af Brianchons Sætning.

Linierne ba, ba_1, bp og bc have Ligningerne

$$x_3 = 0, \quad \nu x_1 + \lambda x_3 = 0, \quad \nu x_1 - \lambda x_3 = 0, \quad x_1 = 0.$$

Heraf følger, at Linierne ba_1 og bp ere harmonisk forbundne med Hensyn til a og Linien aa_1's Skjæringspunkt med bc. Dette følger ogsaa af, at a_1p er en Diagonal i en fuldstændig firsidet Figur, hvis andre Diagonaler ere bc og b_1c_1.

Skal Punktet p ligge paa et Keglesnit gjennem a, b og c, maa man have en Ligning af Formen

$$\alpha\mu\nu + \beta\nu\lambda + \gamma\lambda\mu = 0.$$

Ved til Enhedspunkt at tage det Punkt, som svarer til dette Keglesnit paa samme Maade som p til Keglesnittet (1), kan man give Ligningen Formen

$$\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu = 0. \qquad (2)$$

Naar denne Ligning er opgiven, indeholder Ligning (1) kun én variabel Parameter, og Indhyllingskurven kan da søges paa sædvanlig Maade. Man finder let, at Differentialkvotienterne af venstre Side i (1) og (2) med Hensyn til λ, μ og ν maa være proportionale, eller at

$$\frac{\mu + \nu}{x_2 x_3} = \frac{\nu + \lambda}{x_3 x_1} = \frac{\lambda + \mu}{x_1 x_2}. \qquad (3)$$

Bortelimineres $\lambda : \mu : \nu$ mellem disse og (2), faas

$$x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2 + x_1^2 x_2^2 - 2 x_1^2 x_2 x_3 - 2 x_2^2 x_3 x_1 - 2 x_3^2 x_1 x_2 = 0. \qquad (4)$$

Denne Ligning fremstiller en Kurve af fjerde Orden med Spidser i Punkterne a, b og c. Tangenterne i Spidserne have Ligningerne

$$x_2 - x_3 = 0, \; x_3 - x_1 = 0, \; x_1 - x_2 = 0$$

og gaa altsaa alle gjennem Enhedspunktet. Idet Kurven ikke kan have mere end 3 Dobbeltpunkter eller Spidser, faar den ingen Dobbeltpunkter, bliver af 3die Klasse, faar 1 Dobbelttangent og ingen Vendetangent. Den bliver af Slægten 0.

Dette sidste, som kan udledes af Udtrykket for en Kurves Slægt ved dens Plückerske Tal, er en nødvendig Følge af, at den kun i ét Punkt berører hvert Keglesnit i Rækken, og at atter hvert af disse svarer til et enkelt Punkt af Keglesnittet (2). At Tangenterne i Spidserne gaa gjennem samme Punkt, er noget, som gjælder om alle Kurver af 3die Klasse med 1 Dobbelttangent.

Tillæg.

Skjønt det ikke forlanges i den stillede Opgave, skal dog her endnu tilføjes følgende:

Enhver Kurve med de opgivne Plückerske Tal kan frem-
res paa den her angivne Maade; thi en Kurve af 3die

Klasse med en Dobbelttangent afhænger af 8 Konstanter. Den maa altsaa være fuldkommen bestemt ved, at som her de 3 Spidser og Skjæringspunktet mellem Tangenterne i disse ligge i vilkaarlig opgivne Punkter.

Vi skulle endvidere tilføje en Anvendelse af den i Opgaven givne Frembringelse af Kurven (4) til en Udledelse af den samme Kurves Ligning i Liniekoordinater i samme System, der er noget simplere, end den sædvanlige Overgang fra Punkt- til Liniekoordinater her vilde blive.

Keglesnittet (1) har i Liniekoordinater Ligningen

$$\lambda^2 X_1^2 + \mu^2 X_2^2 + \nu^2 X_3^2 - 2\mu\nu X_2 X_3 - 2\nu\lambda X_3 X_1 - \lambda\mu X_1 X_2 = 0. \tag{5}$$

Ligningen i Liniekoordinater for dette Keglesnits Indhyllingskurve, idet λ, μ, ν tilfredsstille Ligning (2), findes ganske, som da der brugtes Punktkoordinater, altsaa ved Ligningerne

$$\frac{\mu + \nu}{X_1(\lambda X_1 - \mu X_2 - \nu X_3)} = \frac{\nu + \lambda}{X_2(-\lambda X_1 + \mu X_2 - \nu X_3)} = \frac{\lambda + \mu}{X_3(-\lambda X_1 - \mu X_2 + \nu X_3)}. \tag{6}$$

Disse Forhold omdannes til følgende nye (ved Operationer, som let ses paa Tællerne)

$$\frac{(\nu + \lambda) X_3 + (\lambda + \mu) X_2}{-2\lambda X_1 X_2 X_3} = \frac{(\lambda + \mu) X_1 + (\mu + \nu) X_3}{-2\mu X_1 X_2 X_3} = \frac{(\mu + \nu) X_2 + (\nu + \lambda) X_1}{-2\nu X_1 X_2 X_3}. \tag{7}$$

De heri indbefattede tre Løsninger $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$ udtrykker, at Keglesnittet (5) gaar gjennem de faste Punkter a, b, c og vedkommer os derfor ikke her.

Naar man multiplicerer de tre Forhold med $2 X_1 X_2 X_3$ og adderer $X_1 + X_2 + X_3$ til dem alle, faar man

$$\frac{\lambda X_1 - \mu X_2 - \nu X_3}{\lambda} = \frac{-\lambda X_1 + \mu X_2 - \nu X_3}{\mu} = \frac{-\lambda X_1 - \mu X_2 + \nu X_3}{\nu}. \tag{8}$$

Ligningerne (6) og (8) give ved stykkevis at multiplicere Forholdene

$$\frac{\mu+\nu}{\lambda X_1} = \frac{\nu+\lambda}{\mu X_2} = \frac{\lambda+\mu}{\nu X_3}. \qquad (9)$$

Nu er ifølge (2)

$$\mu+\nu = -\frac{\mu\nu}{\lambda}, \quad \nu+\lambda = -\frac{\nu\lambda}{\mu}, \quad \lambda+\mu = -\frac{\lambda\mu}{\nu},$$

og altsaa bliver

$$\frac{\mu\nu}{\lambda^2 X_1} = \frac{\nu\lambda}{\mu^2 X_2} = \frac{\lambda\mu}{\nu^2 X_3} \qquad (10)$$

eller

$$\frac{\lambda^3}{\frac{1}{X_1}} = \frac{\mu^3}{\frac{1}{X_2}} = \frac{\nu^3}{\frac{1}{X_3}}. \qquad (11)$$

Indsættes disse Værdier i (2), faas den søgte Tangentligning

$$X_1^{\frac{1}{3}} + X_2^{\frac{1}{3}} + X_3^{\frac{1}{3}} = 0, \qquad (12)$$

eller i rational Form, som faas ved at isolere $X_3^{\frac{1}{3}}$, opløfte til tredie Potens, reducere ved Hjælp af (12), isolere $3 X_1^{\frac{1}{3}} X_2^{\frac{1}{3}} X_3^{\frac{1}{3}}$ og atter kubere

$$(X_1 + X_2 + X_3)^3 - 27 X_1 X_2 X_3 = 0.$$

Idet Dobbelttangenter bestemmes ved Liniekoordinater som Dobbeltpunkter ved Punktkoordinater, finder man at denne Kurve har Enhedslinien $X_1 = X_2 = X_3$ til Dobbelttangent, og at Berøringspunkterne, som blive imaginære, naar a, b, og c ere reelle, bestemmes ved

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - X_2 X_3 - X_3 X_1 - X_1 X_2 = 0. \qquad (14)$$

Det er iøvrigt værd at lægge Mærke til, at disse sidste to Resultater kunde været udledede uden Brug af Tangentligningen, alene af de Omstændigheder, at Kurvens Ligning (i Punktkoordinater) er symmetrisk med Hensyn til x_1, x_2 og x_3, og at der ifølge de Plückerske Ligninger er én og kun én Dobbelttangent. Denne og dens Berøringspunkter maa da ogsaa have Bestemmelser, der ere symmetriske med Hensyn til Koordinaterne. Liniens Koordinater X_1, X_2 og X_3 maa da være lige store, og de to Berøringspunkter maa bestemmes ved en Ligning af Formen

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + 2\alpha X_2 X_3 + 2\alpha X_3 X_1 + 2\alpha X_1 X_2 = 0. \quad (15)$$

Idet venstre Side skal kunne opløses i et Produkt af Faktorer, der ere rationale i X_1, X_2 og X_3, maa man have

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3\alpha^2 + 2\alpha^3 = (1-\alpha)^2(1+2\alpha) = 0.$$

Roden $\alpha = 1$ vilde gjøre venstre Side i (15) kvadratisk, hvilket ikke her skal være Tilfældet, da Tangenten skal være en Dobbelttangent og ikke en Vendetangent. $\alpha = -\frac{1}{2}$ giver netop Ligning (14).

III. I den specielle Opgave faas

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\operatorname{tg}\left(\frac{z}{a}\right)} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{-1} = \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{\frac{x}{a\cos^2\frac{z}{a}}}; \quad (1)$$

men i Stedet for en af disse Ligninger kan, da Hastigheden er konstant, sættes

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = c. \quad (2)$$

Af Fladens Ligning og (1) faas

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} = 0. \quad (3)$$

Af Fladens Ligning og (2) faas

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + a^2\left(\frac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{x^2+y^2}\right)^2 = c.$$

Indføres polære Koordinater i xy-Planen, faas af (3) og (4)

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 0, \quad (5)$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + a^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = c. \quad (6)$$

Eliminationen af $\frac{d\theta}{dt}$ giver

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{r\left(c - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right)}{a^2+r^2} = 0.$$

Idet t ikke findes i denne Ligning, sætte vi

$$\frac{dr}{dt} = p, \quad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dp}{dr} \cdot p$$

og faa da $$p\frac{dp}{dr} - \frac{r(c-p^2)}{a^2+r^2} = 0,$$

hvor de variable let separeres. Man faar

$$c - p^2 = \frac{a^2+r^2}{k},$$

hvoraf $$p = \frac{dr}{dt} = \sqrt{c - \frac{a^2+r^2}{k}} \qquad (7)$$

Dernæst bestemmes $\frac{d\theta}{dt}$ af (6).

[Hvis man ikke benytter Ligning (2), men i (1) indfører $z = a\theta$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, kommer man til Ligninger, hvoraf foruden (5) let udledes

$$-2 \cdot \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - r\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\frac{d^2\theta}{dt^2}}{\frac{r}{a^2}}$$

som giver

$$-\frac{d\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)}{dt} = a^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$-r^2\frac{d\theta}{dt} = a^2\frac{d\theta}{dt} + k.$$

Mellem denne og (5) borteliminereres $\frac{d\theta}{dt}$.]

IV. Besvarelsen af denne Opgave findes i alle Fremstillinger af de elliptiske Funktioners Theori ogsaa i Tillæget til Sturm, Cours d'Analyse 9ième éd. tome sec. p. 516.

Særlig Skoleembedsexamen i Mathematik.

(Juni 1890.)

Fysik.

I. Newtons Ringe.

II. naales Dampes Vægtfylde?

Astronomi.

Et Instrument til fuldstændige astronomiske Stedbestemmelser antages opstillet saaledes, at man paa det umiddelbart kan aflæse Sigteliniens sfæriske Koordinater efter et Koordinatsystem, hvis Hovedpol falder i Horizonten, og hvori Retningsvinklerne regnes ud fra Retningen fra Hovedpolen tii Zenith, i samme Omløbsretning som Azimutherne i Zenithsystemet og Timevinklerne i Nordpolsystemet. Efter hvilke Formler transformeres de derved iagttagne Koordinater [1]) til Zenithafstande og Azimuth [2]) til Nordpolafstande og Timevinkler.

Som Exempel beregnes Zenith- og Nordpolkoordinater for en Stjerne, hvis Afstand fra Instrumentpolen har været 129° 47′ 53″ i Retningen 344° 27′ 19″, under Forudsætning af, at Instrumentpolen har ligget nøjagtigt i Nord-nordøst og at Stedets Polhøjde er 55° 41′ 13″,6.

Mathematik.

I et bekvemt valgt Koordinatsystem søges Ligningen for den plane Kurve, der er bestemt som Skjæringskurve mellem en Omdrejningsflade (Tore) med en Cirkel, der ikke skjærer Omdrejningsaxen, til Meridiankurve og Tangentplanen i et ukonvext Punkt af Fladen.

Hvilke ere Kurvens Dobbeltpunkter, og hvorledes kunne de Grene, som støde sammen i det reelle Dobbeltpunkt, være beliggende mod hinanden? Særlig undersøges det Tilfælde, hvor Planen berører Fladen i to Punkter.

Hvilke ere Fladens Hovedsnit og tilhørende Krumningsradier i dens Røringspunkt med Planen, og hvorledes kunne disse Krumningsradier benyttes til Bestemmelse at Snitkurvens Tangenter i dette Punkt.

Kemi.

En Analyse.

Løsning af Opgaven i Astronomi.

Det iagttagne Steds Afstand fra Instrumentpolen betegnes med a, dets Retningsvinkel med B og Instrumentpolens Azimut kaldes R; Stedets Zenitdistans z og Azimut A, findes ved Trekanten mellem Stedet, Zenit og Instrumentpolen, idet Afstanden mellem sidstnævnte Punkter er 90°.

Ligningerne

$$\left.\begin{aligned} \cos z &= \sin a \cos B \\ \sin z \sin (R - A) &= \sin a \sin B \\ \sin z \cos (R - A) &= \cos a \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

give da den omspurgte Transformation til Zenitkoordinater og trænge ikke til nogen Omformning, da de netop have den Form, som i trigonometriske Ligninger bør anses som den explicite, der tilsteder skarp Bestemmelse og afskjærer Tvetydighed.

For Zenitkoordinaternes Transformation til Nordpolskoordinater, Polafstand p og Timevinkel T haves, idet Polhøjden $= \varphi$, af den almindelige sfæriske Trekant mellem Stedet, Zenit og Nordpolen Formlerne:

$$\left.\begin{aligned} \cos p &= \sin \varphi \cos z - \cos \varphi \sin z \cos A \\ \sin p \cos T &= \cos \varphi \cos z + \sin \varphi \sin z \cos A \\ \sin p \sin T &= \sin z \sin A \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Ved heri at opløse A i Differensen $R - (R - A)$ kan man eliminere z og $R - A$ ved Hjælp af (1) og komme til direkte Formler for Transformationen af a og B til p og T. Men disse Formler ere ikke bekvemme til Beregning af en enkelt Transformation. Bedre er det at indføre Hjælpevinkler u og Y bestemte ved

$$\left.\begin{aligned} \cos u &= \sin z \sin A \\ \sin u \sin Y &= \sin z \cos A \\ \sin u \cos Y &= \cos z \end{aligned}\right\} \qquad (3),$$

ved disses Indsættelse i (2) faas da

$$\left.\begin{aligned} \cos p &= \sin u \sin (\varphi - Y) \\ \sin p \cos T &= \sin u \cos (\varphi - Y) \\ \sin p \sin T &= \cos u = \sin z \sin A \end{aligned}\right\} \qquad (4).$$

Begge disse Ligningssystemer have den samme typiske Form som (1).

Da i det opgivne Regneexempel Instrumentpolen skal ligge i Nord-Nord-Øst er $R = 202^0\, 30'$, endvidere er $a = 129^0\, 47'\, 53''$, $B = 344^0\, 27'\, 19''$, $\varphi = 55^0\, 41'\, 13'',6$. Med 6-cifrede Tavler er:

L sin B	= n v.428119		
L sin a	= v.885534		
L cos B	= v.983816		
L cos a	= n v.806237	= L sin z cos (R — A)	
L sin a sin B	= n v.313653	= L sin z sin (R — A)	
	v.507416*	= L tang (R — A — 180°)	
	$197^0 49' 53''.9$	= R — A	
	n v.978619*	= L cos (R — A)	
	n v.486035*	= L sin (R — A),	til Prøve
	v.827618	= L sin z	
L sin a cos B	= v.869350	= L cos z	
	v.958268*	= L tang (z — 0°),	Prøve ved sin z
z	= $42^0 15' 5''.0$		
A	= $4^0 40' 6''.1$	= R — (R — A)	

L sin A	= v 8.910561		
L cos A	= v.998557		
L sin z cos A	= v.828175	= L sin u sin Y	
L cos z	= v.869350*	= L sin u cos Z	
	v.956825*	= L tang (Y — 0°)	
	$42^0 9' 24''.0$	= Y	
	v.826826*	= L sin Y,	til Prøve
	v.870001*	= L cos Y	

φ — Y	= $13^0 31' 49''.6$	
L cos (φ — Y)	= v.987776	
L sin u	= v.999349	
L sin (φ — Y)	= v.369146	
L sin z sin A	= v 8.738179	= L sin p sin T
L sin u cos (φ — Y)	= v.987125	= L sin p cos T

$\nu\, 8.751054^* = \mathrm{L\,tang}(\mathrm{T} - 0^0)$
$3^0 13' 35''.0 = \mathrm{T}$
$\nu\, 8.750365^* = \mathrm{L\,sin\,T}$, til Prøve
$\nu.999311^* = \mathrm{L\,cos\,T}$
$\nu.987814 = \mathrm{L\,sin\,p}$
$\mathrm{L\,sin\,u\,sin}(\varphi - \mathrm{Y}) = \nu.368495 = \mathrm{L\,cos\,p}$
$0.619319^* = \mathrm{L\,tang}(\mathrm{p} - 0^0$
$76^0 27' 24''.7 = \mathrm{p}$

Prøve ved sin p og cos p.

Der er i denne Regning nogle Ejendommeligheder, paa hvilke jeg tillader mig at henlede Opmærksomheden. Tegnet ν anbefaler jeg at bruge som fast Tegn for -1, $\nu = -1$; i en logarithmisk Regning som denne, gjør dette Tegn brugt som Karakteristik den bekjendte uheldige Tilføjelse af -10 overflødig, og det har overhovedet store Fordele at bruge det i Regninger, hvor positive og negative Tal forekomme stærkt i Flæng. Med Bogstavet n foran hele Logarithmen betegner jeg, at den tilhører et negativt Tal.

Logarithmerne til Tangenterne ere her og bør i al sædvanlig Regning knn anvendes til Vinkler i 1ste Kvadrant, saaledes som Tabellerne give denne Funktion. Hvor man af givne Logarithmer til r cos S og r sin S skal bestemme r som positivt Tal og S i deraf følgende rette Kvadrant, bør Regningen for at kunne udføres mekanisk begynde med Bestemmelse af den Vinkel, Q, nemlig enten 0^0 eller 90^0 elier 180^0 eller 270^0 som ved at adderes til den ved L tang fundne Vinkel i første Kvadrant vil give den rette Vinkel S; Q sættes altsaa $= 0^0$, naar baade r cos S og r sin S ere positive, men $\mathrm{Q} = 90^0$, naar kun det første af disse Tal er negativt, $\mathrm{Q} = 180^0$, naar begge ere negative og $\mathrm{Q} = 270^0$, naar kun r sin S er negativ, medens r cos S er positiv, derpaa regnes

i første og tredie Kvadrant efter Reglen

$$\mathrm{L\,r\,sin\,S} - \mathrm{L\,r\,cos\,S} = \mathrm{L\,tang}\,(\mathrm{S} - \mathrm{Q})$$

men i anden og fjerd[illegible]rant efter Reglen

$$\mathrm{L\,r\,cos\,S} - [illegible] \mathrm{tang}\,(\mathrm{S} - \mathrm{Q}).$$

Og Opslagets Resultat nedskrives strax som

$$S = Q + (S - Q).$$

Ved den paafølgende Bestemmelse af L r benyttes Tabellen medens den endnu ligger opslaaet paa $S - Q$ til Udtagelse først af den største blandt $L \sin(S - Q)$ og $L \cos(S - Q)$, den til Højre i de sædvanlige Tabeller, og denne trækkes altsaa fra det tilsvarende største enten $r \sin S$ eller $r \cos S$. Tilsidst beregnes den mindre af disse Værdier til nyttig Prøve paa Regningens Rigtighed.

De i Exemplet med * betegnede Tal vil og bør Regneren med voxende Øvelse undlade at nedskrive.

Løsning af Opgaven i Mathematik.

Torens Ligning bliver

$$(z^2 + x^2 + y^2 + a^2 - b^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2) \qquad (1)$$

hvor det er opgivet, at $b < a$. Idet xz-planen kan lægges vinkelret paa Snitplanen, bliver dennes Ligning

$$z = \operatorname{tg} v\,(x - a) + b \sec v. \qquad (2)$$

Elimination af z mellem (1) og (2) giver den søgte Kurves Projektion paa (x, y)-Planen. For Koordinaterne i selve Planen vil det være bekvemt at tage Berøringspunktet, om hvilket det vides, at det bliver et Dobbeltpunkt, til Begyndelsespunkt, medens Planens Skjæringslinie med xz-planen tages til x-Axe. Medens y-Koordinaterne blive uforandrede, bliver den nye Abscisse x_1 bestemt ved

$$x = x_1 \cos v + a - b \sin v, \qquad (3)$$

hvorefter (2) giver

$$z = x_1 \sin v + b \cos v. \qquad (4)$$

Ved Indsættelse i (1) faas for Kurven følgende Ligning

$$\begin{aligned}(x_1^2 + y^2)^2 + 4a x_1 (x_1^2 + y^2) \cos v \\ + 4a(a - b \sin v) x_1^2 - 4a b y^2 \sin v = 0.\end{aligned} \qquad (5)$$

Denne Ligning viser, at de uendelig fjerne Cirkelpunkter og Begyndelsespunktet ere Dobbeltpunkter. Tangenterne i det sidste danne med x-Axen Vinklerne α og $\pi - \alpha$, naar

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{a - b \sin v}{b \sin v}}, \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{b \sin v}{a}}. \tag{6}$$

Hvis den har flere end disse 3 Dobbeltpunkter maa den være sammensat af 2 Cirkler. Dette finder Sted, naar Kurvens Plan berører Fladen i 2 Punkter, i hvilket Tilfælde $b = a \sin v$, men ellers ikke. Da x-Axen er Symmetriaxe, ville de to Grene, som forbindes ved Dobbeltpunktet ligge paa hver sin Side af Axen, naar denne foruden i Dobbeltpunktet skjærer Kurven i imaginære Punkter; men den ene indeslutter den anden, naar disse Skjæringspunkter ere reelle. Det ene eller det andet finder Sted, eftersom $b \lessgtr a \sin v$, ɔ: eftersom Tangentplanen ligger udenfor eller skjærer den anden Meridiancirkel til Toren, som ligger i samme Plan som den, der indeholder Berøringspunktet.

Hovedsnittene i Berøringspunktet ere dels Meridianplanen ɔ: xz-Planen, dels den derpaa vinkelrette Plan gjennem Fladens Normal. Krumningsradien i den første er b, i den anden $\frac{a}{\sin v} - b$, men gaaende til modsat Side.

En vilkaarlig Krumningsradius ϱ bestemmes altsaa ved Ligningen

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\varphi}{b} - \frac{\sin^2\varphi}{\frac{a}{\sin v} - b}.$$

Den bliver uendelig for

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{a - b \sin v}{b \sin v}},$$

som netop er den tidligere givne Bestemmelse af $\operatorname{tg}\alpha$.

Skoleembedsexamen i Mathematik.

(Sommeren 1890.)

Fysik.

I. Newtons Ringe.

II. Hvorledes maales Dampes Vægtfylde.

Astronomi.

Samme Opgave som den foregaaende (S. 18).

Mathematik.

I. Hvorledes bevises Sturms Sætning?

Naar Ligningen $f(x) = 0$ har Rødderne $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, der alle ere forskjellige, og Sturms Funktioner ere

$$f(x),\ f'(x),\ f_2(x)\ldots$$

bevises, at man kan sætte

$$f_2(x) = \Sigma(x_\alpha - x_\beta)\frac{f(x)}{(x - x_\alpha)(x - x_\beta)}\ \begin{pmatrix}\alpha = 1, 2 \ldots n\\ \beta = 1, 2 \ldots n\end{pmatrix}.$$

II. Samme Opgave som den foregaaende (S. 18).

III. Vis, at Ligningen

$$(yx^2 + y^3 - xy)\,dx + x^2\,dy = 0$$

har en Eulersk Faktor af Formen $e^x f(x^2 + y^2)$. Bestem Faktoren og integrer Ligningen.

IV. Udvikl Læren om Ligevægtsfiguren for en bøjelig Snor.

En homogen bøjelig Snor, af hvilken Enhed af Længde har Massen m, er i relativ Hvile, idet den danner en plan Kurve, som roterer om X-axen i et retvinklet System med den konstante Vinkelhastighed ω. Der virker ingen ydre Kræfter. Idet Y-axen tænkes at følge med Kurvens Plan, bliver for $y = b$, $\frac{dy}{dx} = 0$ og Spændingen lig a. Til $y = 0$ svarer $x = 0$. Find Kurvens Ligning.

Det i Ligningen indgaaende Integral ønskes udtrykt ved vedtagne Transcendenter.

Chemi.

En Analyse.

Løsning af Opgaverne i Mathematik. *)

I. Lad den algebraiske Ligning være

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots a_n = 0.$$

Vi foretage da først den i Opgaven omtalte Summation, idet vi holde α konstant og f. Ex. sætte $\alpha = 1$. Da er

$$\Sigma_1 = \sum_{\beta=1}^{\beta=n} \frac{f(x)}{x - x_1} \frac{(x_1 - x_\beta)^2}{x - x_\beta}$$

$$= \frac{f(x)}{x - x_1} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} \left(2x_1 - x - x_\beta + \frac{(x - x_1)^2}{x - x_\beta}\right)$$

$$= \frac{f(x)}{x - x_1} \cdot \left(n(2x_1 - x) + a_1 + (x - x_1)^2 \frac{f'(x)}{f(x)}\right)$$

idet $\quad \Sigma x_\beta = - a_1$ og $\Sigma \frac{1}{x - x_\beta} = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Nu dannes selve den omtalte Sum $f_2(x)$, der bestemmes ved

$$2 f_2(x) = f(x) \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \left(-2n + \frac{nx + a_1}{x - x_\alpha}\right) + f'(x) \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} (x - x_\alpha)$$

$$= -2n^2 f(x) + 2(nx + a_1) f'(x),$$

hvoraf $\quad n^2 f(x) - (nx + a_1) f'(x) = - f_2(x)$.

Multipliceres altsaa $f(x)$ med den positive Faktor n^2 og divideres det udkomne med $f'(x)$, faar man ved at benytte Kvotienten $nx + a$, en Rest, der tagen med modsat Fortegn er den i Opgaven nævnte Sum; denne kan altsaa i Sturms Række benyttes som $f_2(x)$.

(C. J.)

III. Sættes $x^2 + y^2 = u$, faar man som Betingelse for, at $e^x f(u)$ er Eulersk Faktor:

$$\frac{d}{dy} [e^x f(u) (x^2 y + y^3 - xy)] = \frac{d}{dx} (e^x x^2 f(u),$$

der let reduceres til

$$f(u)(3y^2 - 3x) = f'(u)\, u\, (2x - 2y^2).$$

---

*) Løsninger af den astronomiske og den anden mathematiske Opgave findes ovenfor henholdsvis Side 19 og Side 22.

Bortkastes her Faktoren $y^2 - x$, der ikke giver noget Integral af Ligningen, haves til Bestemmelse af $f(u)$,

$$3f(u) + 2u f'(u) = 0,$$

hvoraf
$$f(u) = cu^{-\frac{3}{2}}.$$

Faktoren er altsaa $e^x (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$.

Multipliceres Ligningen med denne, faas

$$U = \int \frac{x^2 e^x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} dy + \varphi(x) = \frac{y e^x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \varphi(x) = c.$$

Dannes $\frac{dU}{dx}$, ser man let, at $\varphi(x)$ er Nul, saa at Integralet bliver

$$e^x y = c\sqrt{x^2+y^2}.$$

(C. J.)

IV. Den relative Hvile for et System, der drejer sig om en fast Axe kan som bekjendt behandles som absolut, naar man tilføjer den sædvanlige Centrifugalkraft. Derved faas Ligningerne

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0$$

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + \omega^2 m y ds = 0.$$

Den første af disse giver $T\frac{dx}{ds} = a$, idet man benytter de opgivne Konstanter.

Den anden Ligning bliver da

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 m y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 0,$$

eller, idet man sætter $\frac{dy}{dx} = y'$ og separerer,

$$a\frac{y'dy'}{\sqrt{1+y'^2}} + \omega^2 m y dy = 0.$$

Deraf faas ved Integration

$$a\sqrt{1+y'^2} + \omega^2 m y^2 = a + \omega^2 m b^2, \text{ og}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\omega\sqrt{m}}{a}\sqrt{(b^2-y^2)(2a+\omega^2 m b^2 - \omega^2 m y^2)}$$

$$x = \frac{a}{\omega \sqrt{m}} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(b^2 - y^2)(2a + \omega^2 mb^2 - \omega^2 my^2)}}.$$

Dette reduceres efter bekjendte Formler let til den sædvanlige Normalform for det elliptiske Integral af første Art.

(C. J.)

Polyteknisk Examen.

(Januar 1891.)

Kemikere.

Idet s betegner en plan Kurves Buelængde, x Abscissen til Buens ene Endepunkt, a en konstant Størrelse, har man givet

$$\frac{ds}{dx} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

Man skal finde Kurvens Ligning i retvinklede Koordinater x og y, idet $x = a$ skal give $y = 0$. Man skal angive Kurvens Figur og finde Størrelsen af hele det Areal, den indeslutter. Til Kurven skal endvidere findes en Tangent, som i Forbindelse med Axerne afskærer en Trekant, hvis Areal er saa stort som muligt.

Opløsning. Man finder:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{1}{3}}}, \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Denne Ligning fremstiller en Hypocykloide af bekjendt Figur.

Arealet er: $$4 \int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} dx.$$

Her substitueres:

$$x = u^3, \quad a^{\frac{2}{3}} - u^2 = z^2 u^2 \quad (\text{eller } x = a \sin^3 \theta).$$

Derved faas:

$$\text{Arealet} = 12a^2 \cdot \int_0^\infty \frac{z^4}{(1 + z^2)^4} dz = \tfrac{3}{8} \pi a^2.$$

Maximumsopgaven løses uden Regning, naar man vé
at Tangentlængden mellem Axerne er konstant $= a$.

Man kan ogsaa bemærke, at de paa Axerne af Ta
genten afskaarne Stykker ere:

$$Y_1 = a^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}, \quad X_1 = a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}},$$

hvor x og y ere Koordinater til Røringspunktet.

Der søges altsaa Maximum af

$$x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} \text{ eller af } x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}},$$

medens Summen

$$x^{\frac{2}{2}} + y^{\frac{2}{3}} \text{ er konstant } = a^{\frac{2}{3}}.$$

Resultatet er derfor

$$x = y = \frac{a}{2\sqrt{2}},$$

naar Tangenten ligger i første Kvadrant.

Man kan naturligvis ogsaa bruge Differentiation.

Ingeniører.

1. Find x og y udtrykte som Funktioner af t, naar

$$\frac{dx}{dt} + 4y - 3x - 3\sin t + \cos t = 0,$$

$$\frac{dy}{dt} + y - x - \sin t = 0.$$

Opløsning. Naar man eliminerer x mellem de givn
Ligninger, faar man:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = 0,$$

$$y = e^t(Ct + C').$$

Derefter giver den sidste af de givne Ligninger

$$x = e^t(C + 2C' + 2Ct) - \sin t.$$

Man kan naturligvis ogsaa benytte d'Alembert's Method

2. En Flade frembringes af en foranderlig Cirkel, hv
Plan stedse er parallel med YZ-Planen, og hvis Centrum sted

ligger i XZ-Planen (retvinklede Koordinater). Cirklen skal bestandig skære Parablen

$$y^2 = x, \quad z = 0,$$

og den rette Liinie

$$z = 1, \quad y = 0.$$

Hvilken Ligning faar Fladen? Hvad er det for en Flade? Find det Volumen, som begrænses af Fladen og de to Planer

$$x = 0 \text{ og } x = 1.$$

Foruden de Cirkler, som have frembragt Fladen, indeholder den endnu en anden Række af cirkulære Snit. Hvorledes ere disse bestemte?

Opløsning. Fladens Ligning bliver:

$$y^2 + z^2 + xz - z - x = 0,$$

eller

$$y^2 + (z + x)(z - 1) = 0.$$

Da den er homogen m. H. t.

$$x + 1, \quad y, \quad z - 1,$$

fremstiller den en Kegleflade af 2den Orden med Toppunkt i $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$.

Da Fladens Ligning kan skrives:

$$y^2 + \left(z + \frac{x-1}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4},$$

bliver det søgte Volumen:

$$\pi \int_0^1 \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) dx = \frac{7}{12}\pi.$$

Voluminet kan naturligvis ogsaa findes uden Integration.

Lægges en Kugle gjennem Fladens Skæringslinie med YZ-Planen, faar denne Kugle Ligningen

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax - z = 0,$$

hvor a er arbitrær. Kuglens Skæringslinie med Fladen bestemmes ved Kuglens Ligning og

$$x(x - z + 1 + a) = 0.$$

Ligningen

$$x - z + 1 + a = 0,$$

vil, naar a varierer, bestemme det andet Sæt af cirkulære Snit.

3. Et tungt homogent plant Areal, som har Form af et Rektangel med Sider a og b, kan uden Gnidning dreje sig i sin egen Plan, som er lodret, om Midtpunktet af den ene Side a; dette Midtpunkt er fast. Ved Begyndelsen af Bevægelsen er Siden b vandret, og der er ingen Begyndelseshastighed.

Naar Rektanglet har drejet sig gjennem en vilkaarlig Vinkel θ, skal man bestemme Vinkelhastigheden og Trykket paa det faste Punkt som Funktioner af θ.

Naar Rektanglet har drejet sig gjennem en given spids Vinkel v, støder den nederste Side b i en Afstand p fra sit øverste Punkt paa et fast Punkt. Derved standser Bevægelsen. Hvilket Stød faar det sidst nævnte Punkt?

Opløsning. X-Axen vælges horisontal, Y-Axen positiv nedad. Komposanterne af Reaktionen ere X_1 og Y_1, Tyngdepunktets Abscisse er x_1.

$$X_1 - \Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0,$$

$$Y_1 - \Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2} + Mg = 0,$$

$$-\Sigma m\left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2}\right) + Mg\, x_1 = 0.$$

Den sidste Ligning giver:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot \frac{a^2 + 4b^2}{12} = \frac{gb}{2} \cos\theta, \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{12\, gb}{a^2 + 4b^2} \sin\theta.$$

Herved er Vinkelhastigheden bestemt. Derefter findes Reaktionerne af de to første Ligninger.

$$X_1 = -\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \Sigma m x - \frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot \Sigma m y = \frac{-9 M g b^2 \sin\theta \cos\theta}{a^2 + 4b^2},$$

$$Y_1 = -\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \Sigma m y + \frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot \Sigma m x - Mg$$

$$= \frac{M g b^2 (-9 \sin^2\theta + 3)}{a^2 + 4b^2} - Mg.$$

Stødet paa det Punkt, som standser Bevægelsen kaldes I. Da er:

$$p \cdot I = \left(\Sigma m r^2 \frac{d\theta}{dt}\right)_{\theta = v}$$

$$I = M \cdot \frac{\sqrt{\frac{1}{12} g b (a^2 + 4b^2) \sin v}}{p}.$$

Blandinger.

Et analytisk-geometrisk Bevis for de trigonometriske Funktioners Additionstheorem.

(Af C. Juel.)

I den analytiske Geometris Begyndelsesgrunde vises det, hvorledes et Punkt kan bestemmes ved retvinklede Koordinater regnede paa sædvanlig Maade med Fortegn. Den positive løbsretning for Vinkler fastlægges tillige saaledes, at $(XY) = +\frac{\pi}{2}$, idet X og Y betyde Axernes positive Retninger. Vi ville i det følgende gaa ud fra, at Theorien alene ved Hjælp af Læren om ligedannede Trekanter er ført saa vidt, at Ligningen for en ret Linie er erkjendt at være af første Grad (og omvendt), og at Udtrykket for Afstanden mellem to Punkter er udviklet.

Ligningen for en Cirkel med Centrum i Begyndelsespunktet O er da $x^2 + y^2 = 1$. Lad nu M være et vilkaarligt Punkt paa Cirklen saaledes beliggende, at Vinklen mellem X og Linien OM regnet positiv fra O mod M er lig v. Man kan da sætte

$$x = \cos v, \quad y = \sin v, \tag{1}$$

hvorved disse blive fuldstændig bestemte Punktioner af Argumentet v. Lad (x_1, y_1) være et andet Punkt af Cirklen bestemt ved Argumentet v_1.

Drejer man nu hele Planen en Vinkel v_1 om O, vil M komme i et Punkt M' af Cirklen, der er bestemt ved Argumentet $v' = v_1 + v$.

Da ved Drejningen en ret Linie gaar over i en ret Linie, og Punktet (0, 0) bliver liggende, maa Koordinaterne (x', y')

til den nye Stilling af et vilkaarligt Punkt (x, y) bestemmes ved Udtryk af Formen

$$x' = ax + by; \quad y' = a_1 x + b_1 y.$$

Da $(1, 0)$ skal gaa over i (x_1, y_1) kræves først

$$a = y_1; \quad a_1 = y_1.$$

Da dernæst Cirklen $x^2 + y^2 = 1$ skal gaa over i sig selv, kræves $b^2 + b_1^2 = 1, \quad bx_1 + b_1 y_1 = 0.$

Af disse udledes

enten $b = y_1; \quad b_1 = -x_1$

eller $b = -y_1; \quad b_1 = x_1.$

Af disse maa imidlertid den anden Mulighed forkastes, da Valget af den positive Omløbsretning medfører, at en og samme Drejning skal føre $(1, 0)$ over i $(0, 1)$ og $(0, 1)$ over i $(-1, 0)$. Man maa altsaa have

$$x' = x_1 x - y_1 y, \quad y' = y_1 x + x_1 y. \tag{2}$$

At der ved disse Formler nu virkelig bestemmes tilsvarende Punkter før og efter Drejningen, sés à posteriori derved, at alle tilsvarende Afstande blive ligestore.

Anvendes endelig Transformationen paa et Punkt af Cirklen, og indfører man Betegnelserne (1), giver (2) de almindelige Additionsformler for cosinus og sinus-funktionerne.

Rettelse.

Ved en Feiltagelse fra Redaktionens Side er det ikke blevet bemærket, at Løsning 2 af Opgave (4):

$$2\left(y\frac{dy}{dx} - x\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - \frac{dy}{dx} = 0,$$

ikke behandler denne Opgave, men i Stedet derfor:

$$\left(2y\frac{dy}{dx} - x\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - \frac{dy}{dx} = 0.$$

Gammafunktionens Theori
i elementær Fremstilling. I.

Af J. L. W. V. Jensen.

Skjønt der existerer en meget rig Litteratur vedrørende Gammafunktionen, er der dog først for nyligt fremkommet en samlet Udvikling af denne Funktions Egenskaber i Forening med en temmelig fuldstændig Bibliografi [1]). Da der imidlertid ikke synes at være lagt nogen Vægt paa en nøjagtig Fremstilling i det citerede Arbejde, og Behandlingen ej heller er gjennemført fra noget bestemt Synspunkt, ligesaa lidt som den er baseret paa de simpleste Forudsætninger, mener jeg, at nærværende Afhandling ikke vil være ganske uden Interesse, idet der heri vil blive givet en kort, men nøjagtig og ret fuldstændig Theori af den omhandlede og de dermed sammenhørende Funktioner paa Grundlag af den elementære Funktionslære, d. v. s. den Del af de uendelige Rækkers og Produkters, og særlig da Potensrækkernes Theori, som simplest og naturligst kan behandles uden Anvendelse af Differential- og Integralregning. Jeg beskjæftiger mig altsaa i det følgende med visse Funktioners Egenskaber for en vilkaarlig komplex variabel og deres Udtryk ved uendelige Produkter og Rækker, medens Sammenhængen med bestemte Integraler maa falde udenfor denne Afhandlings Omraade; Overgang til disse sidste kan imidlertid ske med den største Lethed paa næsten ethvert Punkt, hvad jeg maaske ved en anden Lejlighed skal udvikle nærmere.

1. Definitioner. Naar vi forsøge at bestemme den éntydige Funktion $f(s)$, som tilfredsstiller Funktionalligningen

$$f(s+1) = s\,f(s), \qquad (1)$$

er det nødvendigt først at undersøge, om der gives flere end én Løsning af denne Opgave. Lad foreløbigt $\Gamma(s)$ betegne en vis bestemt og éntydig Løsning, og lad os sætte $f(s) = p(s)\,.\,\Gamma(s)$, man ser da øjeblikkeligt, at Relationen

$$p(s+1) = p(s)$$

er en nødvendig og tilstrækkelig Betingelse for, at $f(s)$ tilfredsstiller (1). Dette vil med andre Ord sige, at naar vi have fundet én Løsning af Funktionalligningen, existerer der uendelig mange, idet enhver Løsning uden at forandre sin Karakter som saadan kan multipliceres med en aldeles vilkaarlig periodisk Funktion med den additive Periode 1, og det er tillige indlysende, at vi paa den Maade kunne finde enhver mulig Løsning. Da saaledes den givne Funktionalligning ikke er tilstrækkelig til Bestemmelse af $f(s)$, ville vi i det følgende opsøge passende Bestemmelser for at finde en speciel Løsning $\Gamma(s)$.

Ifølge (1) skal

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s} = \frac{\Gamma(s+2)}{s(s+1)} = \ldots$$
$$= \frac{\Gamma(s+n)}{s(s+1)\ldots(s+n-1)}, \quad (2)$$

hvor n, som overalt i det følgende, betegner et helt positivt Tal, og s er en vilkaarlig komplex variabel, som ikke maa være noget helt negativt Tal eller Nul. For $s = 1$ følger heraf, idet vi som en ret naturlig Vedtægt sætte

$$\Gamma(1) = 1,$$

at $\Gamma(n+1) = n!$, og endvidere for s hel positiv ved Ombytning af n og s i (2)

$$\frac{\Gamma(n+s)}{(n-1)!\,n^s} = \frac{n(n+1)\ldots(n+s-1)}{n^s},$$

hvoraf findes

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Gamma(s+n)}{(n-1)!\,n^s} = 1. \quad (3)$$

Man ledes nu naturligt til at fastsætte som en yderligere Bestemmelse [2]), at denne Ligning, der kun er direkte afledt for hele positive s, skal gjælde for alle s, forudsat at dette er muligt. Det maa her bemærkes, at vi overalt i det følgende ved n^s forstaa den éntydige Funktion $e^{s\ln}$, hvori Logarithmen ln er reel og positiv. [illegible] (2) er nu

$$\Gamma(s) = \frac{(n-1)!\,n^s}{s\ldots(s+n-1)} \cdot \frac{\Gamma(n+s)}{(n-1)!\,n^s}$$

$$= \frac{1}{s}\prod_{\nu=1}^{n-1}\frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^s}{1+\frac{s}{\nu}} \cdot \frac{\Gamma(n+s)}{(n-1)!\,n^s},$$

hvoraf man, under den nys gjorte Forudsætning, ved at lade n voxe i det uendelige finder

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s}\prod_{1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^s}{1+\frac{s}{\nu}}, \tag{4}$$

eller

$$\Gamma(s) = \lim_{n=\infty}\frac{(n-1)!\,n^s}{s\ldots(s+n-1)}. \tag{4'}$$

Funktionen $\Gamma(s)$ er altsaa fuldstændig defineret ved Ligningerne (2) og (3), og der staar blot tilbage at vise, at (3) ikke er meningsløs, eller med andre Ord at højre Side af (4) har en bestemt og endelig Værdi, som tilfredsstiller (1). Nu finder man imidlertid for alle s, hvis absolute Værdier ere mindre end et givet Tal N, og for $\nu > N$ og > 1 ved Hjælp af Binomialformlen

$$\left|\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^s : \left(1+\frac{s}{\nu}\right) - 1\right|$$

$$= \left|\frac{s(s-1)}{1.2}\frac{1}{\nu^2} + \frac{s(s-1)(s-2)}{1.2.3}\frac{1}{\nu^2} + \ldots\right| : \left|1+\frac{s}{\nu}\right|$$

$$< \left(\frac{N(N+1)}{1.2}\frac{1}{\nu^2} + \ldots\right) : \left(1-\frac{N}{\nu}\right),$$

hvilket sidste Udtryk er uafhængigt af s og efter Multiplikation med ν^2 for voxende ν nærmer sig Grænseværdien $\frac{1}{2}N(N+1)$. Hermed er bevist, at Produktet er ligelig konvergent for alle endelige s, og dette gjælder ogsaa, naar s er Nul eller et helt negativt Tal, dersom blot den tilsvarende uendelige Faktor af Produktet udelades.

Efter at dette er slaaet fast, se vi nu umiddelbart af (4) eller (4'), at $\Gamma(s)$ virkelig tilfredsstiller (1) og (3).

Naar (4') multipliceres med $1 = \lim_{n=\infty}(n+a)^s \cdot n^{-s}$, hvori

a skal være uafhængig af n, men meget godt kan afhænge af s, finder man

$$\Gamma(s) = \lim_{n=\infty} \frac{(n-1)!\,(n+a)^s}{s(s+1)\ldots(s+n-1)}, \qquad (4'')$$

som i sin Form er noget almindeligere end (4'), og som der i det følgende vil være Brug for.

Inden vi gaa videre, ville vi omforme (4). Man har som bekjendt

$$\frac{1}{\nu+1} < l\,(1+\frac{1}{\nu}) < \frac{1}{\nu}$$

eller

$$0 < \frac{1}{\nu} - l\,(1+\frac{1}{\nu}) < \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1},$$

hvoraf følger, at $\Sigma\left(\frac{1}{\nu} - l\,(1+\frac{1}{\nu})\right)$ er konvergent. Nu er imidlertid

$$\sum_1^n \left(\frac{1}{\nu} - l\,(1+\frac{1}{\nu})\right) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - l\,(n+1),$$

og man kan altsaa sætte

$$C = \sum_1^\infty \left(\frac{1}{\nu} - l\,(1+\frac{1}{\nu})\right)$$

$$= \lim_{n=\infty} [1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - l\,(n+1)],$$

den saakaldte Euler'ske Konstant [3]), hvis Værdi med 10 rigtige Decimaler er 0,5772136649... Man udleder heraf

$$e^{-Cs} = e^{\sum\limits_1^\infty \left(s\,l\,(1+\frac{1}{\nu}) - \frac{s}{\nu}\right)} = \prod_1^\infty (1+\frac{1}{\nu})^s \cdot e^{-\frac{s}{\nu}},$$

som ved at divideres med (4) giver os

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = e^{Cs} \cdot s \prod_1^\infty (1+\frac{s}{\nu})\, e^{-\frac{s}{\nu}}. \qquad (5)$$

Bestemmelsen (3) er, som ovenfor citeret, givet af Weierstrass i hans berømte Afhandling om de analytiske Fakulteter, der maa gjælde som et uovertruffet Mønster paa korrekt og klar Fremstilling. Formlen (4) skyldes Euler [4]), der dog uheldigvis snart erstattede denne gode Definition med Integraludtryk [5]), hvorved flere af Gammafunktionens formelle Egenskaber forbleve skjulte for ham. (4') skyldes Gauss [6]), der

uden Tvivl har været ukjendt med Euler's Udtryk. (5) skyldes Newman[7]) og er ligeledes bleven opstillet af Weierstrass den citerede Afhandling. Den ovennævnte Euler'ske Konstant benævnes undertiden, men ganske med Urette, den Mascheroni'ske Konstant.

Hvad vi her i Overensstemmelse med Legendre have betegnet med $\Gamma(s)$, er af Euler bleven betegnet med $[s-1]$, af Gauss med $\Pi(s-1)$ og af Weierstrass med $1 : Fc(s)$.

2. Egenskaber. Af (5) følger umiddelbart ved bekjendte elementære Sætninger, at $1 : \Gamma(s)$ kan udvikles i en Potensrække med hele positive Exponenter, som er konvergent for alle endelige s, eller at $1 : \Gamma(s)$ er en hel transcendent Funktion med Nulpunkterne af første Orden $0, -1, -2, \ldots$ [2]). Funktionen $\Gamma(s)$ er saaledes en monogen Funktion af s med de uvæsentlig singulære Punkter $0, -1, -2, \ldots$, og samtidigt ses, at Ligningen $\Gamma(s) = 0$ ingen Rødder har. Alt dette følger ogsaa af, at Produktet paa højre Side af (4) er bevist at være ligelig konvergent.

Da $\sin \pi s$ har Nulpunkterne $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, ligger det nær at undersøge Funktionen $1 : [\Gamma(s)\Gamma(1-s)]$, som har de samme Nulpunkter. Ifølge (4) eller (5) finder man

$$1 : [\Gamma(s)\Gamma(1-s)] = -s^2 \prod_{1}^{\infty}\left(1 - \frac{s^2}{\nu}\right).$$

Dette Produkt er imidlertid ifølge en bekjendt Sætning af Euler, som bevises i den elementære Funktionslære, lig med $-\frac{s}{\pi}\sin \pi s$, og altsaa

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}, \tag{6}$$

som ligeledes skyldes Euler.

For $s = \frac{1}{2}$ følger heraf

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}, \tag{7}$$

hvor Kvadratroden er positiv, idet de givne Produktudviklinger alle vise, at $\Gamma(s)$ er reel og positiv, naar s er det. Formlen (7) er funden af Euler allere i 1729. Da man som bekjendt har

$$2^{1-h}h = \sin\frac{\pi}{h} \cdot \sin\frac{2\pi}{h} \ldots \sin\frac{(h-1)\pi}{h},$$

hvor h er et helt positivt Tal, findes ved i (6) at sætte $s = \frac{1}{h}, \frac{2}{h}, \ldots, \frac{h-1}{h}$, multiplicere de derved frembragte Ligninger og uddrage Kvadratroden

$$\Gamma\left(\frac{1}{h}\right)\Gamma\left(\frac{2}{h}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{h-1}{h}\right) = (2\pi)^{\frac{h-1}{2}} h^{-\frac{1}{2}}, \quad (8)$$

som ogsaa skyldes Euler. Vi skulle senere give et andet Bevis for denne Ligning, som ikke støtter sig paa Sinusfunktionens Egenskaber.

Naar vi sætte $(s, n) = \frac{\Gamma(n) \cdot n^s}{s(s+1)\ldots(s+n-1)}$, er ifølge (4') $\lim (s, n) = \Gamma(s)$, og da man let sér, at

$$\frac{(s, n)\,(s+\frac{1}{h}, n)\ldots(s+\frac{h-1}{h}, n)}{(hs, hn)} = \frac{\Gamma(n)^h \cdot n^{\frac{h-1}{2}} \cdot h^{hn}}{\Gamma(nh)} \cdot h^{-hs},$$

og venstre Side af denne Ligning har en bestemt Grænseværdi for $n = \infty$, maa højre Side ogsaa have det, hvorfor man finder for n voxende i det uendelige

$$\frac{\Gamma(s)\,\Gamma(s+\frac{1}{h})\ldots\Gamma(s+\frac{h-1}{h})}{\Gamma(hs)} = k \cdot h^{-hs},$$

hvori Konstanten k kan bestemmes ifølge (8) ved at sætte $s = \frac{1}{h}$, eller $k = (2\pi)^{\frac{h-1}{2}} \cdot h^{\frac{1}{2}}$. Hermed er Gauss' Sætning [6])

$$\Gamma(s)\,\Gamma(s+\frac{1}{h})\ldots\Gamma(s+\frac{h-1}{h}) = h^{\frac{1}{2}-hs}(2\pi)^{\frac{h-1}{2}}\,\Gamma(hs). \quad (9)$$

bevist.

3. Bestemmelse af nogle uendelige Produkter ved Hjælp af Gammafunktionen. Idet vi bibeholde den nys indførte Betegnelse, er naar det hele positive Tal m er større end n

$$(s, m) : (s, n) = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^s}{(1+\frac{s}{n})\,(1+\frac{s}{n+1})\ldots(1+\frac{s}{m-1})},$$

hvoraf ved at lade m og n voxe paa en aldeles vilkaarlig Maade mod uendelig

$$\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s)} = 1 = \lim \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^s}{(1+\frac{s}{n})(1+\frac{s}{n+1})\dots(1+\frac{s}{m-1})}.$$

Antages specielt, at $\frac{m}{n}$ nærmer sig en bestemt Grænseværdi, haves

$$\lim \left(\frac{m}{n}\right)^s = \lim \prod_{n}^{m-1} (1+\frac{s}{\nu}). \qquad (10)$$

Ved Divisjon af Gammafunktioner af forskjellige variable findes ifølge en af Ligningerne (4) eller (5)

$$\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+s)\,\Gamma(\beta-s)} = \prod_{0}^{\infty} (1+\frac{s}{\alpha+\nu})(1-\frac{s}{\beta+\nu}). \qquad (11)$$

Sætte vi med Mellin [8]) $R(s) = a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n$, og betegner $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_n$ de n Rødder i Ligningen $\rho^n \left(1 + R\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) = \rho^n + a_1 \rho^{n-1} + \dots a_n = 0$, følger af (5)

$$\frac{\Gamma^n(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\rho_1 s)\,\Gamma(\alpha-\rho_2 s)\dots\Gamma(\alpha-\rho_n s)}$$
$$= e^{C a_1 s}\left(1+R\left(\frac{s}{\alpha}\right)\right)\prod_{0}^{\infty}\left(1+R\left(\frac{s}{\alpha+\nu}\right)\right)e^{-\frac{a_1 s}{\nu}}. \qquad (12)$$

Specielt mærkes Tilfældet $R(s) = -s^n$, som giver for $\alpha = 1$

$$\frac{1}{\Gamma(1-s)\,\Gamma(1-e^{\frac{2\pi i}{n}}s)\,\Gamma(1-e^{\frac{4\pi i}{n}}s)\dots\Gamma(1-e^{\frac{(n-1)2\pi i}{n}}s)}$$
$$= \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{s}{\nu}\right)^n\right),$$

hvilken Formel er antydet af Liouville [9]).

Er $R(s)$ en lige Funktion af s, bliver det konvergente Produkt $\prod_{0}^{\infty}\left(1+R\left(\frac{s}{\nu+1}\right)\right)$ alene bestemt ved trigonometriske og Exponential-Funktioner ifølge (6). Dette Resultat kan iøvrigt, som man let ser, direkte udledes af Euler's Produktudvikling for $\sin \pi s$ uden Anvendelse af Gammafunktionen.

4. Udvikling af $l\Gamma(s)$. Enhver endelig og bestemt Grænseværdi $\lim\limits_{n=\infty} u_n$ kan omskrives til en uendelig konvergent Række $u_h + \sum\limits_h^\infty (u_{\nu+1} - u_\nu)$. Dette ville vi anvende til Omformning af Ligningen (4″), idet vi tage den naturlige Logarithme paa begge Sider af Lighedstegnet og sætte $a = s$. Det maa her bemærkes, at vi ved de flertydige Logarithmer forstaa den af de forskjellige Værdier, som for reelle positive s bliver reel. Naar vi tænke os s fremstillet i Planen paa sædvanlig Maade, og vi ikke omkredse noget af Punkterne $0, -1, -2, \ldots$, ville begge Sider af den anførte Ligning være éntydig bestemte. Vi sætte altsaa

$u_n = l\Gamma(n) + s\,l(n+s) - ls - l(s+1) - \ldots - l(s+n-1)$, hvoraf udledes

$$u_{\nu+1} - u_\nu = l\nu + s\,l\frac{s+\nu+1}{s+\nu} - l(s+\nu)$$

$$= \left[(s+\nu+\tfrac{1}{2})\,l\frac{s+\nu+1}{s+\nu} - 1\right] - \left[(\nu+\tfrac{1}{2})\,l\frac{\nu+1}{\nu} - 1\right]$$

$$- \left[(\nu+\tfrac{1}{2})\,l\frac{s+\nu+1}{\nu+1} - (\nu-\tfrac{1}{2})\,l\frac{s+\nu}{\nu}\right].$$

Nu er Størrelsen indenfor den sidste af de tre Parentheser det almindelige Led i en konvergent Række, thi

$$\lim_{n=\infty}(n+\tfrac{1}{2})\,l\frac{s+n+1}{n+1} = \lim_{n=\infty}(n+\tfrac{1}{2})\,l\left(1+\frac{s}{n+1}\right) = s, \text{ og}$$

Summen af denne Række for $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ er derfor ifølge den ovenfor gjorte Bemærkning lig med $s - \frac{1}{2}l(1+s)$. Endvidere er $\sum\left[(\nu+\frac{1}{2})\,l\left(1+\frac{1}{\nu}\right) - 1\right]$ konvergent, thi for $\nu > 1$ er $(\nu+\frac{1}{2})\,l\left(1+\frac{1}{\nu}\right) - 1 = \frac{1}{12\nu^2} - \frac{1}{12\nu^3} + \ldots$, og denne Størrelse, multipliceret med ν^2, er endelig. Derfor maa $\sum\left[(s+\nu+\frac{1}{2})\,l\frac{s+\nu+1}{s+\nu} - 1\right]$ være konvergent, da $\sum(u_{\nu+1} - u_\nu)$ skal være det, og vi kunne sætte

$$\omega(s) = \sum_0^\infty\left[(s+\nu+\tfrac{1}{2})\,l\frac{s+\nu+1}{s+\nu} - 1\right]. \qquad (13)$$

Man sér da strax, at

$$
\begin{aligned}
1\Gamma(s) &= u_1 + \sum_1^\infty (u_{\nu+1} - u_\nu) \\
&= [s\,l(1+s) - ls] + [\omega(s) - (s+\tfrac{1}{2})\,l\frac{s+1}{s} + 1] - \omega(1) \\
&\quad - [s - \tfrac{1}{2}\,l(1+s)] \\
&= (s-\tfrac{1}{2})\,ls - s + 1 - \omega(1) + \omega(s).
\end{aligned}
$$

Det gjælder nu om at bestemme den konstante Størrelse $1 - \omega(1)$, som vi for Kortheds Skyld betegne ved k', og i den Anledning bemærke vi, at $\lim \omega(s+n) = 0$; thi $\omega(s+n)$ er Resten af den konvergente Række $\omega(s)$, regnet fra det n^{te} Led. Ved at sætte henholdsvis $s = n$ og $s = 2n$ finder man

$$
\begin{aligned}
2l\Gamma(n) &= (2n-1)\,ln - 2n + 2k' + 2\omega(n), \\
l\Gamma(2n) &= (2n - \tfrac{1}{2})\,l(2n) - 2n + k' + \omega(2n),
\end{aligned}
$$

hvoraf ved Subtraktion udledes

$$
\begin{aligned}
l\frac{\Gamma(n)^2 . n^{\frac{1}{2}}\, 2^{2n-\frac{1}{2}}}{\Gamma(2n)} &= l\frac{2^{\frac{1}{2}} . \Gamma(n)\, n^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\ldots(\frac{1}{2}+n-1)} \\
&= k' + 2\omega(n) - \omega(2n),
\end{aligned}
$$

og altsaaa for $n = \infty$

$$k' = l\,[2^{\frac{1}{2}} . \Gamma(\tfrac{1}{2})] = l\sqrt{2\pi}.$$

Det endelige Resultat bliver derfor

$$l\Gamma(s) = (s-\tfrac{1}{2})\,ls - s + l\sqrt{2\pi} + \omega(s). \qquad (14)$$

Den uendelige Række $\omega(s)$ skyldes Gudermann [10]). Som specielle Tilfælde af (14) bemærke vi henholdsvis for $s = 1$ og $s = \frac{1}{2}$

$$\omega(1) = 1 - l\sqrt{2\pi} \quad \text{og} \quad \omega(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}(1 - l2).$$

Vi have nylig sét, at $\omega(s)$ konvergerer mod Nul, naar s voxer med positive hele Tilvæxter mod uendelig. Derfor bliver ifølge (14) $(s-\frac{1}{2})\,ls - s + l\sqrt{2\pi}$ et tilnærmet Udtryk for $l\Gamma(s)$, naar s voxer paa den angivne Maade. Antages s positiv reel og hel, haves specielt den under Navnet Stirlings Formel [11]) bekjendte Tilnærmelsesformel.

Inden vi gaa over til at generalisere dette Resultat, ville vi vise nogle Anvendelser af (14). Man har

$$\Gamma(s) = \lim_{n=\infty} \frac{\Gamma(n) \cdot n^s}{s(s+1)\dots(s+n-1)}$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{n^{n-\frac{1}{2}} \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot n^s \cdot e^{\omega(n)}}{s(s+1)\dots(s+n-1)}$$

og altsaa

$$\Gamma(s) = \sqrt{2\pi} \lim_{n=\infty} \frac{n^{n+s-\frac{1}{2}} e^{-n}}{s(s+1)\dots(s+n-1)}, \qquad (15)$$

som skyldes Gilbert[12]). Endvidere kunne vi, som Cauchy har vist, ved Hjælp af (14) bestemme Grænseværdien k af

$$\frac{\Gamma(n)^h n^{\frac{h-1}{2}} h^{hn}}{\Gamma(nh)} = h^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{h-1}{2}} e^{h\omega(n)-\omega(nh)},$$

eller

$$k = h^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{h-1}{2}}.$$

Herved er Gauss's Sætning (9), og (8) som specielt Tilfælde deraf, paany bevist. Det smukkeste Bevis opnaas dog ved (15).

Betegnelsen $\omega(s)$ skyldes Catalan; Binet har betegnet denne Funktion ved $\mu(s)$, Cauchy ved $\tilde{\omega}(s)$.

5. Undersøgelse af $\omega(s)$ og $\Gamma(s)$ for uendelig store s.

Naar $|\alpha + 1| > 1$, har man

$$(\alpha + \frac{1}{2}) \, l(1 + \frac{1}{\alpha}) - 1 = -[(\alpha+1) - \frac{1}{2}] \, l(1 - \frac{1}{\alpha+1}) - 1$$

$$= \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\nu - 1}{2\nu(\nu+1)} \frac{1}{(\alpha+1)^\nu}.$$

Da nu $\frac{\nu - 1}{2\nu(\nu+1)} \leq \frac{1}{12}$, for $\nu = 2, 3, 4, \dots$,

er altsaa

$$\left| (\alpha + \frac{1}{2}) \, l(1 + \frac{1}{\alpha}) - 1 \right| < \frac{1}{12} \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{|\alpha+1|^\nu}$$

$$= \frac{1}{12} \frac{1}{|\alpha+1| \cdot (|\alpha+1| - 1)}.$$

Anvendes dette paa Rækken (13), idet vi bemærke, at $\sum \frac{1}{|s+\nu+1| \, (|s+\nu+1| - 1)}$ maa være konvergent, da

$\frac{\nu^2}{|s+\nu+1|\,(|s+\nu+1|-1)}$ er endelig for voxende ν, saa følger dels heraf, at $\omega(s)$ kan udvikles i den konvergente Dobbeltrække (Binet [13])

$$\omega(s) = \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\nu - 1}{2\nu(\nu+1)} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{(s+\mu)^{\nu}}$$

$$= \frac{1}{12} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{(s+\mu)^2} + \frac{1}{12} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{(s+\mu)^3} + \dots \qquad (16)$$

og dels, at

$$|\omega(s)| < \frac{1}{12} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|s+\nu|\,(|s+\nu|-1)},$$

alt under den Forudsætning, at $|s+1|$, $|s+2|$, ... ere større end 1, eller at s, fremstillet i Planen paa sædvanlig Maade, ligger udenfor en Række Cirkler med Radierne 1 om Punkterne -1, -2, -3, ... som Centrer, hvad vi her for Simpelheds Skyld ville antage. (Ligger s indenfor eller paa Omkredsen af én eller to af disse Cirkler, behøver man iøvrigt blot at udskyde ét eller to tilsvarende Led af Rækken for $\omega(s)$).

Inden vi gaa over til at betragte den sidst anførte Ulighed for vilkaarlige komplexe s, ville vi gjøre en nærliggende Bemærkning. Er s positiv reel, vil

$$0 < \omega(s) < \frac{1}{12} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(s+\nu-1)(s+\nu)}$$

$$= \frac{1}{12} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+\nu-1} - \frac{1}{s+\nu}\right) = \frac{1}{12s},$$

og altsaa finder man

$$l\Gamma(s) = (s - \tfrac{1}{2})\, ls - s + l\sqrt{2\pi} + \frac{\theta}{12s}, \quad 0 < \theta < 1,$$

en meget hyppig anvendt Sætning, som man ellers plejer at bevise i Integralregningen.

Lad i det almindelige Tilfælde $(1+\rho)$ være den korteste Afstand fra $s = x + yi$ til noget af Punkterne -1, -2, ... da er ρ ifølge Forudsætningerne positiv og $|s+\nu|$ og derfor vil

$$\frac{1}{|s+\nu|\,(|s+\nu|-1)} \leqq \frac{1}{|s+\nu|^2}\,\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+\rho}}$$

$$= \frac{1+\rho}{\rho}\,\frac{1}{|s+\nu|^2} = \frac{1+\rho}{\rho}\,\frac{1}{x^2+y^2+2\nu x+\nu^2}.$$

Antages først x **positiv**, vil den sidste Størrelse — idet vi bemærke, at man altid har $A^2+B^2 \geqq \frac{1}{2}(A+B)^2$, naar A og B ere positive reelle — være mindre end

$$\frac{1+\varrho}{\varrho}\,\frac{1}{|s|^2+\nu^2} \leqq \frac{1+\varrho}{\varrho}\,\frac{2}{(|s|+\nu)^2}$$

$$< \frac{1+\varrho}{\varrho}\,\frac{2}{(|s|+\nu-1)\,(|s|+\nu)}$$

$$= 2\,\frac{1+\varrho}{\varrho}\left(\frac{1}{|s|+\nu-1} - \frac{1}{|s|+\nu}\right),$$

og derfor vil

$$(x>0),\quad |\omega(s)| < \frac{1+\varrho}{6\varrho}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{|s|+\nu-1} - \frac{1}{|s|+\nu}\right)$$

$$= \frac{1+\varrho}{6\varrho}\,\frac{1}{|s|}. \qquad \text{(I)}$$

Antages derimod x **Nul eller negativ**, sætte vi $-x = m+\varepsilon$, hvor m er hel positiv eller Nul, og $0 \leqq \varepsilon < 1$, og da er

for $\nu = 1, 2, \ldots m-1$, $\dfrac{1}{|s+\nu|^2} = \dfrac{1}{(|x|-\nu)^2+y^2}$

$$\leqq \frac{2}{(|x|-\nu+|y|)^2} < 2\left(\frac{1}{|x|+|y|-\nu-1} - \frac{1}{|x|+|y|-\nu}\right),$$

for $\nu = m$, $\dfrac{1}{|s+m|^2} \leqq \dfrac{2}{(|x|-m+|y|)^2}$

$$= \frac{2}{(\varepsilon+|y|)^2},$$

for $\nu = m+1, m+2, \ldots,$ $\dfrac{1}{|s+\nu|^2} = \dfrac{1}{(\nu-|x|)^2+y^2}$

$$\leqq \frac{2}{(\nu-|x|+|y|)^2} < 2\left(\frac{1}{\nu-1-|x|+|y|} - \frac{1}{\nu-|x|+|y|}\right).$$

Man finder derfor

$$(x \leqq 0),\quad |\omega(s)|$$

$$< \frac{1+\varrho}{6\varrho}\left(\left(\frac{1}{\varepsilon+|y|} - \frac{1}{|x|+|y|-1}\right) + \frac{1}{(\varepsilon+|y|)^2} + \frac{1}{|y|-\varepsilon}\right) \qquad \text{(II)}$$

hvori de to første Størrelser indenfor Parenthesen skulle udelades for m = o, den første for m = 1. Da $\frac{1+\varrho}{\varrho}$ er endelig, ses nu umiddelbart af (I) og (II), at $\omega(s)$ konvergerer ligeligt imod Nul, naar Afstanden imellem s og det nærmeste Punkt af den negative reelle Axe voxer i det uendelige. Denne Betingelse er specielt opfyldt, naar s voxer i det uendelige med konstant Argument uden dog at gjennemløbe den negative reelle Axe.

Naar s voxer paa den angivne Maade er derfor ifølge (14)

$$\lim_{|s|=\infty} \frac{\Gamma(s)}{s^{s-\frac{1}{2}} e^{-s} \sqrt{2\pi}} = 1, \qquad (17)$$

hvor for den flertydige Funktion $s^{s-\frac{1}{2}}$ tages den Værdi, som bliver reel med s. Denne Ligning kan benyttes til at udvide Gyldigheden af (3); man finder let, idet t er en komplex Størrelse,

$$\lim_{|s|=\infty} \frac{\Gamma(s+t)}{\Gamma(s) \, . \, s^t} = 1.$$

Vi have ovenfor benyttet Udviklingen af $(\alpha+\frac{1}{2})\, l(1+\frac{1}{\alpha}) - 1$ efter Potenser af $\frac{1}{\alpha+1}$; man kunde lige saa vel have udviklet efter Potenser af $\frac{1}{\alpha}$. For $|\alpha| > 1$ er nemlig

$$(\alpha+\frac{1}{2})\, l(1+\frac{1}{\alpha}) - 1 = \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{(-1)^\nu(\nu-1)}{2\nu(\nu+1)} \frac{1}{\alpha^\nu},$$

hvorved i Stedet for (16) findes

$$\omega(s) = \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{(-1)^\nu(\nu-1)}{2\nu(\nu+1)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{(s+\mu)^\nu}$$

$$= \frac{1}{12} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{(s+\mu)^2} - \frac{1}{12} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{(s+\mu)^3} + \ldots, \qquad (18)$$

gjældende for $|s|$, $|s+1|$, $|s+2|, \ldots$ større end 1. Denne Formel skyldes ligeledes Binet[14]). Hverken (16) eller (18) ere egnede til numerisk Beregning af $\omega(s)$ og derigjennem af $l\Gamma(s)$; Rækker, som ere skikkede hertil, skulle vi senere opstille.

6. Funktionen $\psi(s)$. Definition og Egenskaber.

Ifølge (4) er

$$l\frac{\Gamma(s+t)}{\Gamma(s)} = -l\left(1+\frac{t}{s}\right)+\sum_{1}^{\infty}\left[t\,l\left(1+\frac{1}{\nu}\right)-l\left(1+\frac{t}{s+\nu}\right)\right],$$

hvilken uendelig Række maa være ligelig konvergent, da den er udledt af ligelig konvergente Produkter. Naar s ikke er Nul eller hel negativ, kan $\Gamma(s+t)$ for tilstrækkelig smaa t udvikles efter Taylors Række $\Gamma(s+t) = \Gamma(s)+\Gamma'(s)t+\ldots$ Indsættes dette i venstre Side og udvikles begge Sider efter Potenser af t, findes ved Sammenligning af Koefficienterne til t

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -\frac{1}{s}+\sum_{1}^{\infty}\left[l\left(1+\frac{1}{\nu}\right)-\frac{1}{s+\nu}\right].$$

Denne Funktion, som vi i det følgende betegne med $\psi(s)$, kan, idet vi benytte Rækkerne $C = \sum_{1}^{\infty}\left[l\left(1+\frac{1}{\nu}\right)-\frac{1}{\nu}\right]$ og $-\frac{1}{s} = \sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{s+\nu+1}-\frac{1}{s+\nu}\right)$, udtrykkes ved

$$\psi(s) = -C-\frac{1}{s}+\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{s+\nu}\right)$$

$$= -C+\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu+1}-\frac{1}{s+\nu}\right). \qquad (19)$$

Disse Rækker ere ligelig konvergente for alle endelige s; vælges nemlig N saa stor, at $N > |s|$, saa er for alle $\nu \geqq N+1$

$$\left|\frac{1}{\nu+1}-\frac{1}{\nu+s}\right| = \left|\frac{s-1}{(\nu+1)(\nu+s)}\right| < \frac{N-1}{(\nu+1)(\nu-N)},$$

som er uafhængig af s og det almindelige Led i en konvergent Række.

Da
$$-\frac{1}{s}+\sum_{1}^{n-1}\left[l\left(1+\frac{1}{\nu}\right)-\frac{1}{s+\nu}\right]$$

$$= l\,n-\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}-\ldots-\frac{1}{s+n-1},$$

har man ogsaa

$$\psi(s) = \lim_{n=\infty}\left(l\,n-\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}-\ldots-\frac{1}{s+n-1}\right), \qquad (19')$$

som med Benyttelse af $0 = \lim_{n=\infty} [l(n+a) - ln]$ kan skrives

$$\psi(s) = \lim_{n=\infty} \left[l(n+a) - \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \dots - \frac{1}{s+n-1}\right]. \quad (19'')$$

Af (19) udledes endvidere

$$\psi(s) - \psi(t) = \sum_0^\infty \left(\frac{1}{t+\nu} - \frac{1}{s+\nu}\right) = \sum_0^\infty \frac{(s-t)}{(t+\nu)(s+\nu)}, \quad (19''')$$

som i sin Form er noget almindeligere end (19).

Af en af Ligningerne (19) ser man øjeblikkeligt, at

$$\psi(1) = -C,$$

og at

$$\psi(s+1) - \psi(s) = \frac{1}{s}, \quad (20)$$

$$\psi(s+n) - \psi(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \dots + \frac{1}{s+n-1}.$$

Ved at indsætte den sidste Ligning i (19') findes

$$\lim_{n=\infty} [\psi(s+n) - ln] = 0, \quad (21)$$

som nedenfor vil blive generaliseret. Det er øjensynligt, at (19') omvendt kan udledes af (20) og (21), saa at disse to Ligninger ere tilstrækkelige til Definition af $\psi(s)$.

Da Rækkeudviklingerne for $\psi(s)$ ere ligelig konvergente, maa $\psi(s)$ være en monogen Funktion af s, som bliver uendelig af første Orden i Punkterne $s = 0, -1, -2, \dots$, men i alle andre Punkter forholder sig regulær.

Ifølge (19''') er for $t = -s$

$$\psi(s) - \psi(1-s) = -\sum_0^\infty \left(\frac{1}{s+\nu} - \frac{1}{\nu+1-s}\right)$$

$$= -\frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} - \frac{1}{1+s} + \frac{1}{2-s} - \frac{1}{3-s} + \dots,$$

og altsaa ifølge en bekjendt Sætning af Euler

$$\psi(s) - \psi(1-s) = -\pi \cot \pi s, \quad (22)$$

som ogsaa kunde udledes af (6) paa samme Maade, som (19) er udledt af (4).

Sætte vi for Kortheds Skylds $(s, n) = ln - \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \dots - \frac{1}{s+n-1}$, ser man let, at

$$h\,(hs, hn) - (s, n) - (s + \frac{1}{h}, n) - \ldots - (s + \frac{h-1}{h}, n) = hlh,$$

hvoraf ved at lade n voxe i det uendelige udledes

$$h\,\psi(hs) - \psi(s) - \psi(s + \frac{1}{h}) - \ldots - \psi(s + \frac{h-1}{h}) = hlh. \quad (23)$$

Disse Sætninger kunne alle findes ved logarithmisk Differentiation af de tilsvarende for $\Gamma(s)$, (Gauss[6]). Jeg har foretrukket ovenstaaende elementære Udvikling, som iøvrigt vel neppe kan tænkes simplere.

Hvad vi her med Cauchy have betegnet med $\psi(s)$, er af Gauss bleven betegnet med $\Psi(s-1)$, af Legendre med $\varphi(s)$ og $Z'_{(s)}$ og af Binet med $\lambda'(s)$.

Som en Følge af, at Rækkerne for $\psi(s)$ ere ligelig konvergente, kan $\psi(s+t)$ for $|t| < |s|, |s+1|, |s+2|, \ldots$ udvikles efter stigende Potenser af t, og dette kan ske ved Udvikling af de enkelte Led i højre Side af (19). Man finder ifølge Taylor's Formel ved Sammenligning af Koefficienterne til t^m, at

$$\psi^{(m)}(s) = (-1)^{m+1}\, m! \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(s+\nu)^{m+1}}, \quad m \geqq 1. \quad (24)$$

Disse Funktioner ere, som man let ser, fuldstændigt definerede ved Ligningerne

$$\psi^{(m)}(s+1) - \psi^{(m)}(s) = \frac{(-1)^m\, m!}{s^{m+1}} \text{ og } \lim_{n=\infty} \psi^{(m)}(s+n) = 0.$$

De tilfredsstille desuden Ligninger analoge med (22) og (23), hvilket vi dog ikke skulle opholde os med at vise.

7. Bestemmelse af nogle uendelige Rækker og Produkter ved Hjælp af $\psi(s)$.

Med Anvendelse af de indførte Funktioner $\psi(s)$, $\psi'(s)$, ... er det let at summere Rækker af meget almindelige Former. Er f. Ex. F (s) en algebraisk rational Funktion

$$F(s) = \frac{a s^{n-1} + b s^{n-2} + \ldots + l}{s^n + \alpha s^{n-1} + \beta s^{n-2} + \ldots + \lambda},$$

kan man bestemme Summen af Rækken $\Sigma\,[F(s+\nu) - F(t+\nu)]$, som iøvrigt er konvergent. Man opløser nemlig paa bekjendt

Maade $F(s+\nu)$ og $F(t+\nu)$ i en Sum af Partialbrøker, hvorved Rækken deles i en Sum af flere andre, som hver for sig kunne bestemmes ifølge (19''') og (24). Er a = 0, bliver $\Sigma F(s+\nu)$ konvergent. — I det specielle Tilfælde, hvor F (s) er en rational Funktion af s^2, ser man iøvrigt, at en Bestemmelse af Rækken $\sum\limits_0^\infty F(s+\nu)$ kan udføres uden Anvendelse af $\psi(s)$, $\psi'(s)$,... udelukkende ved Hjælp af Euler's Partialbrøkudviklinger for de trigonometriske Funktioner. — Som et Exempel paa Anvendelsen af disse Bemærkninger kan nævnes

$$\sum_0^\infty \frac{1}{(s+\nu-\rho_1)(s+\nu-\rho_2)\ldots(s+\nu-\rho_n)}$$
$$= -\frac{\psi(s-\rho_1)}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)\ldots(\rho_1-\rho_n)}$$
$$-\frac{\psi(s-\rho_2)}{(\rho_2-\rho_1)(\rho_2-\rho_3)\ldots(\rho_2-\rho_n)}$$
$$-\ldots-\frac{\psi(s-\rho_n)}{(\rho_n-\rho_1)(\rho_n-\rho_2)\ldots(\rho_n-\rho_{n-1})},$$

hvori $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$ ere forskjellige Størrelser.

Ifølge (5) er

$$\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+t)} = e^{Ct}\,\frac{s+t}{s}\prod_1^\infty \frac{1+\frac{s+t}{\nu}}{1+\frac{s}{\nu}}\, e^{-\frac{t}{\nu}}$$

$$= e^{Ct}\left(1+\frac{t}{s}\right)\prod_1^\infty\left(1+\frac{t}{s+\nu}\right)e^{-\frac{t}{\nu}}.$$

Endvidere er ifølge (19)

$$e^{t\psi(s)} = e^{t\psi(1+s)-\frac{t}{s}} = e^{-Ct-\frac{t}{s}}\prod_1^\infty e^{\left(\frac{t}{\nu}-\frac{t}{s+\nu}\right)},$$

og altsaa (Mellin [15])

$$e^{t\psi(s)}\cdot\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+t)} = \prod_0^\infty\left(1+\frac{t}{s+\nu}\right)e^{-\frac{t}{s+\nu}}, \qquad (25)$$

som er en Generalisation af Formel (5), der gjenfindes for s = 1. Sættes t = 1, faas

$$e^{\psi(s)} = s\prod_0^\infty\left(1+\frac{1}{s+\nu}\right)e^{-\frac{1}{s+\nu}}. \qquad (26)$$

8. Undersøgelse af $\psi(s)$ for uendelig store s.

Naar vi sætte $u_n = l(n+s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \ldots - \frac{1}{s+n-1}$, $u_0 = ls$, er ifølge (19'') for $a = s$,

$$\psi(s) = \lim_{n=\infty} u_n = u_0 + \sum_0^\infty (u_{\nu+1} - u_\nu),$$

og da $$u_{\nu+1} - u_\nu = l(1 + \frac{1}{s+\nu}) - \frac{1}{s+\nu},$$
saa er, idet vi sætte

$$\omega^*(s) = \sum_0^\infty \left(\frac{1}{s+\nu} - l(1+\frac{1}{s+\nu})\right), \tag{27}$$

$$\psi(s) = ls - \omega^*(s), \tag{28}$$

som ogsaa kunde udledes af (26) ved at tage den naturlige Logarithme paa begge Sider af Lighedstegnet.

Naar $|\alpha+1| > 1$, er $\frac{1}{\alpha} - l(1+\frac{1}{\alpha}) = \frac{1}{(\alpha+1)-1} + l(1 - \frac{1}{\alpha+1})$
$= \sum_2^\infty (1 - \frac{1}{\nu}) \frac{1}{(\alpha+1)^\nu}$, og altsaa

$$\left|\frac{1}{\alpha} - l(1+\frac{1}{\alpha})\right| < \sum_2^\infty \frac{1}{|\alpha+1|^\nu} = \frac{1}{|\alpha+1|(|\alpha+1|-1)},$$

hvoraf for $|s+1|$, $|s+2|, \ldots$ større end 1 udledes

$$|\omega^*(s)| < \sum_1^\infty \frac{1}{|s+\nu|(|s+\nu|-1)},$$

hvilken Række vi allerede have undersøgt i Afsnit 5. Voxer s paa den der angivne Maade, er $\lim_{|s|=\infty} \omega^*(s) = 0$, eller

$$\lim_{|s|=\infty} [\psi(s) - ls] = 0, \tag{29}$$

hvorved Gyldigheden af (21) er udvidet.

For $|s+1|$, $|s+2|, \ldots$ større end 1 finder man

$$\omega^*(s) = \sum_{\nu=2}^\infty (1 - \frac{1}{\nu}) \sum_{\mu=1}^\infty \frac{1}{(s+\mu)^\nu}. \tag{30}$$

Anvendes Rækken

$$\frac{1}{\alpha} - l(1+\frac{1}{\alpha}) = \sum_2^\infty \frac{(-1)^\nu}{\nu} \frac{1}{\alpha^\nu},$$

findes derimod

$$\omega^*(s) = \sum_{\nu=2}^\infty \frac{(-1)^\nu}{\nu} \sum_{\mu=0}^\infty \frac{1}{(s+\mu)^\nu}, \tag{31}$$

som er gjældende for $|s|, |s+1|, \ldots$ større end 1. Rækker, som bedre end (30) og (31) egne sig til numerisk Beregning af $\omega^*(s)$, skulle vi senere fremstille.

Ligning (29) kan anvendes til en tilnærmet Bestemmelse af Rødderne i den transcendente Ligning $\psi(s) = 0$. Den imaginære Del af $\psi(x + yi)$ er ifølge (19) lig med

$$yi \sum_0^\infty \frac{1}{(x+\nu)^2 + y^2},$$

som ikke kan blive Nul, med mindre $y = 0$, hvorfor alle Rødderne maa være reelle. Endvidere er ifølge (19''')

$$\psi(x) - \psi(x') = (x - x') \sum_0^\infty \frac{1}{(x+\nu)(x'+\nu)},$$

hvilken uendelige Række bestaar udelukkende af positive Led, naar x og x' falde i et og samme af følgende Intervaller $(0, +\infty)$, $(-1, 0)$, $(-2, -1), \ldots$, og da $\psi(+\infty) = +\infty$, $\psi(-n \pm 0) = \mp\infty$, er saaledes $\psi(x)$ stadigt voxende fra $-\infty$ til $+\infty$ med voxende x i ethvert af de nævnte Intervaller, i hvilket der derfor kun kan falde én Rod. Den positive Rod ligger imellem 1 og 2, da $\psi(1) = -C$ er negativ, $\psi(2) = 1 - C$ positiv, og er af Legendre beregnet til 1,46163... Naar vi betegne den negative Rod i Intervallet $(-n, -n+1)$ ved $-n + x_n$, $(0 < x_n < 1)$, skal ifølge (22)

$$\pi \cot \pi x_n = \psi(n + 1 - x_n) = \ln + \delta_n,$$

hvor δ_n ifølge (29) konvergerer mod Nul for voxende n. Man har altsaa

$$x_n = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\ln + \delta_n},$$

hvoraf udledes $\lim (x_n \ln) = 1$. For store n kan saaledes Roden i Intervallet $(-n, -n+1)$ med Tilnærmelse sættes lig

$$-n + \frac{1}{\ln},$$

hvilket Resultat skyldes Hermite [16]. Erindre vi, at Ligningen $\Gamma(x) = 0$ er umulig, indse vi strax, at $\Gamma'(x) = \psi(x) \cdot \Gamma(x) = 0$ maa have de samme Rødder som $\psi(x) = 0$, hvilket er af Betydning ved Undersøgelse af, hvorledes $\Gamma(x)$ varierer for reelle Værdier af x.

9. Bestemmelse af $\psi(x)$ for rationale x. Det er tilstrækkeligt at indskrænke sig til Bestemmelsen af

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right) = -C + \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu+1} - \frac{q}{p+\nu q}\right),$$

hvor $\frac{p}{q}$ er en ægte Brøk, (p og q hele positive). I Stedet for denne Række ville vi betragte Rækken

$$S = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu+1} - \frac{q}{p+\nu q}\right) t^{p+\nu q}, \ (|t| < 1),$$

som er konvergent for $t = 1$. Ifølge en bekjendt Sætning af Abel er da, naar t voxende gjennem reelle positive Værdier nærmer sig 1,

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right) = -C + \lim_{t=1} S.$$

Man har imidlertid

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{t^{p+\nu q}}{\nu+1} = -t^{p-q}\, l(1-t^q),$$

og det drejer sig da blot om at bestemme $q\sum\limits_{0}^{\infty}\frac{t^{p+\nu q}}{p+\nu q}$, som bestaar af hvert q^{de} af Leddene i Rækken $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu} = -l(1-t)$. Naar $F(t) = \sum\limits_{0}^{\infty} c_\nu t^\nu$ er en given Potensrække finder man som bekjendt, idet $\theta = e^{\frac{2\pi i}{q}}$,

$$\sum_{\mu=0}^{q-1} \theta^{-\mu p} F(t\theta^\mu)$$

$$= q\,(c_p t^p + c_{p+q}\, t^{p+q} + c_{p+2q}\, t^{p+2q} + \ldots);$$

thi

$$\sum_{\mu=0}^{q-1} \theta^{\mu(\nu-p)} = \frac{\theta^{q(\nu-p)}-1}{\theta^{\nu-p}-1} = \frac{1-1}{\theta^{\nu-p}-1} = 0,$$

naar $\nu - p$ ikke er delelig med q, men

$$= \sum_{\mu=0}^{q-1} 1 = q,$$

naar $\nu - p$ er delelig med q.

Man har saaledes

$$S = -t^{p-p}\, l(1-t^q) + \sum_{\mu=0}^{q-1} \theta^{-\mu p}\, l(1-t\theta^{\mu})$$

$$= -t^{p-q}\, l\,\frac{1-t^q}{1-t} + \sum_{\mu=1}^{q-1} \theta^{-\mu p}\, l(1-t\theta^{\mu})$$

$$-(t^{p-q}-1)\, l(1-t),$$

hvoraf ved at gaa til Grænsen

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right) = -C - lq + \sum_{\mu=1}^{q-1} \theta^{-\mu p}\, l(1-\theta^{\mu}).$$

Hermed er den stillede Opgave løst, og det gjælder nu blot om at omforme det fundne Udtryk. Ved at ombytte p med $q-p$ frembringes en ny Ligning, som ved Addition til ovenstaaende giver

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right) + \psi\left(\frac{q-p}{q}\right)$$

$$= -2C - 2lq + 2\sum_{\mu=1}^{q-1} \cos\frac{2\pi\mu p}{q}\,.\, l(1-\theta^{\mu}).$$

Da $\psi\left(\frac{p}{q}\right)$ er reel, kunne vi paa højre Side af Lighedstegnet udelade den imaginære Del, og man finder derfor

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right) + \psi\left(\frac{q-p}{q}\right)$$

$$= -2C - 2lq + \sum_{\mu=1}^{q-1} \cos\frac{2\pi\mu p}{q}\,.\, l\left(2 - 2\cos\frac{2\pi\mu}{q}\right),$$

som ved at kombineres med

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right) - \psi\left(\frac{q-p}{q}\right) = -\pi\cot\frac{\pi p}{q},$$

giver
$$\psi\left(\frac{p}{q}\right) = -C - \frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi p}{q} - lq$$

$$+ \tfrac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{q-1} \cos\frac{2\pi\mu p}{q}\,.\, l\left(2 - 2\cos\frac{2\pi\mu}{q}\right).$$

Da $\cos\frac{2\pi(q-\mu)}{q} = \cos\frac{2\pi\mu}{q}$, og $\cos\frac{2\pi(q-\mu)p}{q} = \cos\frac{2\pi\mu p}{q}$, kan man paa højre Side af Lighedstegnet summere fra $\mu = 1$ til $\mu = \frac{q-1}{2}$ eller $\frac{q}{2}$, eftersom q er

ulige eller lige. Det endelige Resultat bliver altsaa

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right) = -C - \frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi p}{q} - l\,q$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{q'}{}' \cos\frac{2\pi\mu p}{q} \,.\, l\left(2 - 2\cos\frac{2\pi\mu}{q}\right), \qquad (32)$$

hvor $q' = \frac{q}{2}$ eller $\frac{q-1}{2}$, eftersom q er **lige** eller **ulige**, og Mærket tilhøjre for Summationstegnet betyder, at det Led, der svarer til $\mu = \frac{q}{2}$ i første Tilfælde, skal **halveres**.

Den Udvikling, som her er givet, er mere gjennemskuelig og betydelig simplere end den, der findes hos Gauss[*]), hvem den mærkelige Sætning, der er udtrykt i Ligning (32), skyldes. Som specielle Tilfælde af (32) finder man

$\frac{p}{q}$	$\psi\left(\frac{p}{q}\right) + C$
$\frac{1}{2}$	$-\ 2\,l\,2$
$\frac{1}{3}$	$-\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \quad -\frac{3}{2}\,l\,3$
$\frac{2}{3}$	$+\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \quad -\frac{3}{2}\,l\,3$
$\frac{1}{4}$	$-\frac{\pi}{2} \quad -\ 3\,l\,2$
$\frac{3}{4}$	$+\frac{\pi}{2} \quad -\ 3\,l\,2$
$\frac{1}{5}$	$-\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}} - \frac{5}{4}\,l\,5 - \frac{\sqrt{5}}{4}\,l\,\frac{3+\sqrt{5}}{2}$
$\frac{2}{5}$	$-\frac{\pi}{2}\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}} - \frac{5}{4}\,l\,5 + \frac{\sqrt{5}}{4}\,l\,\frac{3+\sqrt{5}}{2}$
$\frac{3}{5}$	$+\frac{\pi}{2}\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}} - \frac{5}{4}\,l\,5 + \frac{\sqrt{5}}{4}\,l\,\frac{3+2\sqrt{5}}{2}$
$\frac{4}{5}$	$+\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}} - \frac{5}{4}\,l\,5 - \frac{\sqrt{5}}{4}\,l\,\frac{3+2\sqrt{5}}{2}$.

(Fortsættes i næste Hefte.)

[1]) G. Brunel. Monographie de la fonction Gamma. Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. 3e série, t. 3. 1886, p. 1—184.

[2]) Weierstrass. Ueber die Theorie der analytischen Facultäten. Crelle's Journal, B. 51. 1854, S. 1—60. Abhandlungen aus der Functionenlehre, S. 181—262.

[3]) Euler. De progressionibus harmonicis observationes. Comment. Acad. Petrop. t. VII, 1734—35. p. 156.

[4]) Euler. Brev til Goldbach, 13. Oktober 1729. Corréspondance math. et phys. de quelques célèbres géométres du 18e siècle publ. p. Fuss. St. Pétersb. 1843.

[5]) Euler. De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt. Comment. Acad. Petrop. t. V, 1730, p. 36.

[6]) Gauss. Disquisitiones generales circa seriem infinitam... Comment. Goetting. t. II, 1812, p. 1—46. Werke, B. III.

[7]) Newman. On $\Gamma(a)$ especially when a is negative. The Cambridge and Dublin math. Journal, v. III, 1848, p. 57—60.

[8]) Mellin. Acta Mathematica, t. III, 1883, p. 102—104, 322—324.

[9]) Liouville. Sur les fonctions Gamma de Legendre. Journal de Liouville, t. XVI, 1852, p. 448—453.

[10]) Gudermann. Additamentum ad functionis $\Gamma(a)$ theoriam. Crelle's Journal, B. 29, 1845, S. 209—212.

[11]) Stirling. Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum. 1730, p. 135.

[12]) Gilbert. Recherches sur le développement de la fonction Γ. Mémoires de l'Académie de Belgique. t. XLI, 1873, p. 1—60.

[13]) Binet. Mémoire sur les intégrales définies Eulériennes et sur leur applications à la théorie des suites, ainsi qu'a l'évaluation des fonctions de grands nombres. Journal de l'École polytech., cah. 27, 1839, p. 123—343.

[14]) Binet. Comptes rendus, t. IX, 1839, p. 39—45.

[15]) Mellin. Öfversigt af K. Svenska Vetensk. Akad. Förhandlingar. 1883.

[16]) Hermite. Sur l'intégrale Eulérienne de seconde espèce. Crelle's Journal, B. 90, 1881, S. 332—338.

Opgave til Løsning.

19. Bevis, at

$$\lim_{n=\infty} \frac{x^n + \frac{(x+1)^n}{x} + \frac{(x+2)^n}{x(x+1)} + \frac{(x+3)^n}{x(x+1)(x+2)} + \cdots}{y^n + \frac{(y+1)^n}{y} + \frac{(y+2)^n}{y(y+1)} + \frac{(y+3)^n}{y(y+1)(y+2)} + \cdots} = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(y)},$$

hvor x og y ere vilkaarlige Tal.

(J. L. W. V. Jensen.)

(Math. Tidsskr. 1886, Opg. Nr. 527.)

Mathematisk Forening.

Møde **Torsdag den 30. Oktober 1890.** Foredrag af Hr. Ingenieur **J. L. W. V. Jensen:** Gammafunktionen i elementær Fremstilling.

Møde **Onsdag den 26. November 1890.** Hr. Professor **Zeuthen** meddeler nogle, for en Del elementære Anvendelser af Antalgeometrien.

Møde **Torsdag den 11. December 1890.** Hr. **P. Wedell-Wedellsborg** indleder en Diskussion om de imaginære Størrelsers Metamathematik.

Derefter Auktion over Tidsskrifter.

Møde **Onsdag den 21. Januar 1891.** Hr. Professor **Julius Petersen** meddeler »Bemærkninger om Mængden af Primtal«.

Møde **Torsdag den 26. Februar 1891.** Foredrag af Hr. dr. phil. **C. Juel:** Om Bestemmelse af Punkter paa en Kurve af tredje Orden ved Tal.

Møde **Torsdag den 19. Marts 1891.** Hr. Professor **Christiansen** meddeler: »Bemærkninger om den Nøjagtighed, som er opnaaet ved Udførelse af de nye Prototyper for Maal og Vægt«.

Møde **Fredag den 1. Maj 1891:** Fri Diskussion.

Møde **Fredag den 29. Maj 1891.** Hr. dr. phil. **H. Valentiner:** Et Par Sætninger om plane Kurver af 4de Orden.

Derefter Generalforsamling.

Gammafunktionens Theori
i elementær Fremstilling. II.

Af J. L. W. V. Jensen.

---

10. Funktionerne P(s) og Q(s). I Afsnit 2 have vi set, at $\Gamma(s)$ er en monogen Funktion af s, som bliver uendelig af første Orden i Punkterne o, — 1, — 2, . . . , men i alle andre Punkter forholder sig regulær. Dette vil med andre Ord sige, at $\Gamma(s+t)$ for tilstrækkelig smaa t kan udvikles i en hel Potensrække af t*), naar s ikke er Nul eller et helt negativt Tal. Finder derimod dette Sted, haves tilstrækkelig smaa t

$$\Gamma(-\nu+t) = \frac{(-1)^\nu}{\nu!} t^{-1} + a_0 + a_1 t + \ldots,$$

idet

$$\lim_{t=0} t\Gamma(-\nu+t) = \lim_{t=0} \frac{\Gamma(1+t)}{(t-\nu)(t-\nu+1)\ldots(t-1)} = \frac{(-1)^\nu}{\nu!}.$$

Herved ledes man til at danne den uendelige Række

$$P(s) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^\nu}{\nu!(\nu+s)}, \tag{33}$$

som er ligelig konvergent for alle s og bliver uendelig i de samme Punkter som $\Gamma(s)$ og paa samme Maade. Vælges nemlig N saa stor, at $N > |s|$, saa er for alle $\nu \geqq N+1$

$$\left|\frac{(-1)^\nu}{\nu!(\nu+s)}\right| < \frac{1}{\nu!(\nu-N)},$$

som er uafhængig af s og det almindelige Led i en konvergent Række. Heraf følger, at P(s) er en i hele Planen defineret monogen Funktion af s, som kun kan blive uendelig for $s = 0, -1, -2, \ldots$, men i alle andre Punkter forholder sig regulær. For tilstrækkelig smaa t er

$$P(-\nu+t) = \frac{(-1)^\nu}{\nu!} t^{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots$$

Det er saaledes indlysende, at $\Gamma(s+t) - P(s+t)$ for hvilke som helst Værdier af s og tilstrækkelig smaa t kan ud-

---

*) En Potensrække ordnet efter stigende hele positive Exponenter af t.

vikles i en hel Potensrække af t, og $\Gamma(s) - P(s)$ kan derfor ifølge en bekjendt Sætning udvikles i en hel Potensrække af s, som konvergerer for alle s, og som man betegner ved $Q(s)$. Resultatet af ovenstaaende Udvikling, der skyldes Prym[17], er altsaa, at man kan sætte

$$\Gamma(s) = P(s) + Q(s), \tag{34}$$

hvor $P(s)$ er defineret ved (33), medens $Q(s)$ er en hel transcendent Funktion af s.

Man har

$$P(s+1) - sP(s) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^\nu(\nu+1)}{(\nu+1)!(\nu+s+1)} - 1 - \sum_0^\infty \frac{(-1)^{\nu+1}s}{(\nu+1)!(\nu+s+1)}$$

$$= -1 + \sum_0^\infty \frac{(-1)^\nu}{(\nu+1)!} = -e^{-1},$$

og P tilfredsstiller derfor Funktionalligningen

$$P(s+1) = sP(s) - e^{-1}, \tag{35}$$

medens $Q(s)$ ifølge (34) og (2) maa tilfredsstille den analoge Ligning

$$Q(s+1) = sQ(s) + e^{-1}. \tag{36}$$

Voxer Afstanden imellem s og det nærmeste Punkt af den negative reelle Axe i det uendelige, vil $P(s)$ konvergere mod Nul; thi er ϱ denne Afstand, haves

$$|P(s)| < \sum_0^\infty \frac{1}{\nu!}\frac{1}{\varrho} = \frac{e}{\varrho}.$$

Derfor maa saa meget mere

$$\lim_{n=\infty} \frac{P(n+s)}{(n-1)!\,n^s} = 0, \tag{37}$$

og ifølge (34) og (3)

$$\lim_{n=\infty} \frac{Q(n+s)}{(n-1)!\,n^s} = 1. \tag{38}$$

At Ligningerne (35) og (37) ere tilstrækkelige til Definition af $P(s)$ (Prym[17]) — og derfor (36) og (38) tilstrækkelige til Definition af $Q(s)$ —, indses paa følgende Maade, som tillige giver os et nyt Udtryk for $P(s)$. Af (35) udledes ved Division med $\Gamma(s+1)$

$$\frac{P(s)}{\Gamma(s)} - \frac{P(s+1)}{\Gamma(s+1)} =$$

hvoraf — ved at ombytte s med $s+1$, $s+2$, ..., $s+n-1$ og addere de fremkomne Ligninger — findes

$$\frac{P(s)}{\Gamma(s)} - \frac{P(s+n)}{\Gamma(s+n)} = e^{-1} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(s+\nu)}, \tag{39}$$

eller

$$P(s+n) = s(s+1)\ldots(s+n-1)\left(P(s) - e^{-1} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{s(s+1)\ldots(s+\nu-1)}\right). \tag{39'}$$

(39) giver for $n = \infty$, idet

$$\lim_{n=\infty} \frac{P(n+s)}{(n-1)!\,n^s} = 0, \quad \lim_{n=\infty} \frac{(n-1)!\,n^s}{\Gamma(n+s)} = 1,$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{P(n+s)}{\Gamma(n+s)} = 0,$$

$$\frac{P(s)}{\Gamma(s)} = e^{-1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(s+\nu)}, \tag{40}$$

eller

$$P(s) = e^{-1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{s(s+1)\ldots(s+\nu-1)}, \tag{40'}$$

som skyldes Bourguet [18]).

Indsættes i (39) $P(s) = \Gamma(s) - Q(s)$, findes

$$\frac{Q(n+s)}{\Gamma(n+s)} - \frac{Q(s)}{\Gamma(s)} = e^{-1} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(\nu+n)}, \tag{41}$$

eller

$$Q(s+n) = s(s+1)\ldots(s+n-1)\left(Q(s) + e^{-1} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{s(s+1)\ldots(s+\nu-1)}\right). \tag{41'}$$

Af (35) og (36) følger ved at lade s konvergere mod Nul

$$P(1) = 1 - e^{-1}, \quad Q(1) = e^{-1},$$

og for $s = 1$

$P(2) = P(1) - e^{-1} = 1 - 2e^{-1}$, $Q(2) = 2e^{-1}$, o. s. v.

Det er let at udlede et almindeligt Udtryk for $P(n)$ og $Q(n)$ af (39) og (41). Man finder ved at lade s konvergere mod Nul

$$P(n) = (n-1)!\left(1 - e^{-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{\nu!}\right),$$

$$Q(n) = (n-1)!\,e^{-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{\nu!}. \tag{42}$$

Af (36) følger

$$Q(0) = \lim_{s=0} \frac{Q(1+s) - e^{-1}}{s} = \lim_{s=0} \frac{Q(1+s) - Q(1)}{s} = Q'(1),$$

som vi senere skulle lære at beregne.

Ved at sætte $s = -n$ i (41') findes endvidere

$$Q(-n) = \frac{(-1)^n}{n!} Q(0) + e^{-1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)} - \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\right). \qquad (43)$$

11. Løsning af en Funktionalligning. Formen af Ligningerne (35) og (36) giver Anledning til at betragte den almindeligere Funktionalligning

$$f(s+1) = s\,f(s) - R(s), \qquad (44)$$

hvor $R(s)$ er en hel rational Funktion af s. Lad $S(s)$ være en vis bestemt Løsning, da skal

$$S(s+1) = s\,S(s) - R(s),$$

og altsaa $f(s+1) - S(s+1) = s(f(s) - S(s))$,

eller ifølge Afsnit 1

$$f(s) - S(s) = p(s)\,\Gamma(s),$$

hvor $p(s)$ er en vilkaarlig periodisk Funktion med den additive Periode 1. Den mest almindelige Funktion, som tilfredsstiller Ligning (44), er derfor

$$f(s) = S(s) + p(s)\,\Gamma(s).$$

For at finde en speciel Løsning $S(s)$ dividere vi (44) med $\Gamma(s+1)$, hvorved faas

$$\frac{f(s)}{\Gamma(s)} - \frac{f(s+1)}{\Gamma(s+1)} = \frac{R(s)}{\Gamma(s+1)},$$

og altsaa $$\frac{f(s)}{\Gamma(s)} - \frac{f(s+n)}{\Gamma(s+n)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{R(s+\nu-1)}{\Gamma(s+\nu)}.$$

I denne Ligning kunne vi nu lade n voxe i det uendelige, idet den derved fremkomne uendelige Række er stærk konvergent, og man skal altsaa have

$$\frac{f(s)}{\Gamma(s)} - \lim_{n=\infty} \frac{f(s+n)}{\Gamma(s+n)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{R(s+\nu-1)}{\Gamma(s+\nu)},$$

hvor Grænseværdien paa venstre Side af Lighedstegnet maa

være endelig og bestemt. For den specielle Løsning $f(s) = S(s)$ antage vi, at denne Grænseværdi er uafhængig af s, og sætte

$$\lim_{n=\infty} \frac{S(s+n)}{\Gamma(s+n)} = \lim_{n=\infty} \frac{S(s+n)}{(n-1)!\, n^s} = K. \tag{45}$$

Man har derfor

$$\frac{S(s)}{\Gamma(s)} = K + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{R(s+\nu-1)}{\Gamma(s+\nu)}. \tag{46}$$

En hver hel rational Funktion af Graden m kan altid bringes paa Formen

$$R(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s(s-1) + \ldots + a_m s(s-1)\ldots(s-m+1),$$

som man let ser ved de ubestemte Koefficienters Methode, og da ved Division med $\Gamma(s+1)$ haves

$$\frac{R(s)}{\Gamma(s+1)} = \frac{a_0}{\Gamma(s+1)} + \frac{a_1}{\Gamma(s)} + \frac{a_2}{\Gamma(s-1)} + \ldots + \frac{a_m}{\Gamma(s-m+1)},$$

saa er ifølge (40)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{R(s+\nu-1)}{\Gamma(s+\nu)} = e \sum_{\mu=0}^{m} \frac{a_\mu P(s-\mu)}{\Gamma(s-\mu)}.$$

Nu kan imidlertid $P(s-\mu) : \Gamma(s-\mu)$ ifølge (39) skrives

$$\frac{P(s-\mu)}{\Gamma(s-\mu)} = \frac{P(s)}{\Gamma(s)} + e^{-1} \sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{1}{\Gamma(s-\mu+\nu)},$$

og man ser derfor strax, at

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{R(s+\nu-1)}{\Gamma(s+\nu)} = \frac{eP(s)}{\Gamma(s)} \sum_{\mu=0}^{m} a_\mu + \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu \sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{1}{\Gamma(s-\mu+\nu)},$$

eller ifølge (46) ved Multiplikation med $\Gamma(s)$

$$S(s) = K\Gamma(s) + eP(s) \sum_{\mu=0}^{m} a_\mu$$
$$+ \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu \sum_{\nu=1}^{\mu} (s-1)(s-2)\ldots(s-\mu+\nu), \tag{47}$$

hvorved den opstillede Funktionalligning er fuldstændig løst. Lindhagen [19], der har udledt denne Løsning paa en noget vidtløftigere Maade og uden at give den i explicit Form, har bemærket, at naar man indfører den hele transcendente Funktion

$$F(s) = \frac{eP(s)}{\Gamma(s)}$$

saa er, som vi have set i forrige Afsnit,

Intervaller, er det indlysende, at Ligningen $P(x) = 0$ mindst maa have én Rod i hvert af Intervallerne $(-\frac{11}{2}, -5)$, $(-6, -\frac{11}{2})$, $(-\frac{15}{2}, -7)$, $(-8, \frac{15}{2})$, . . . , (Bourguet[21]), men ingen i de øvrige Intervaller.

Anm. Det er en Mangel ved ovenstaaende Udvikling, at man ikke faar nogen Oplysning om, der findes mere end én Rod i paagjældende Interval. Bourguet[22]) har forsøgt at bevise, at Ligningen $P(s) = 0$ ikke kan have flere end 4 imaginære Rødder. Hans Bevis herfor er ikke nøjagtigt. I Sammenhæng hermed maa nævnes, at det er uafgjort, om Ligningen $Q(s) = 0$ har Rødder. At den ingen har, naar den reelle Del af $s - 1$ er negativ, er paavistaf Lindhagen[19]). Vi kunne ikke gaa nærmere ind paa disse Spørgsmaal, som fordre større Hjælpemidler end de, der her staa til vor Raadighed; men Forfatteren paatænker ved en anden Lejlighed at undersøge Ligningen $P(s) = k$ for k reel og vise, at Ligningen for $k = 0$ har netop 4 imaginære Rødder.

13. Beregning af Koefficienterne i nogle Potensrækker.

Ifølge (19) er

$$\psi(1 + s) = -C + \sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu + 1} - \frac{1}{\nu + 1 + s}\right),$$

hvoraf udledes ved at udvikle hvert Led i Potensrække af s for $|s| < 1$

$$\psi(1 + s = -S_1 + S_2 s - S_3 s^2 + S_4 s^3 - \dots, \qquad (48)$$

$$S_1 = C,\ S_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots,\ (n > 1). \qquad (48')$$

Koefficienterne S_2 til S_{35} ere beregnede af Legendre[23]) med 16 (15 rigtige) Decimaler, S_2 til S_{70} af Stieltjes[24]) med 32 (30 sikre) Decimaler. For at bestemme Koefficienterne i Rækkeudviklingen

$$\Gamma(1 + s) + 1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots, \qquad (49)$$

som skal være konvergent for $|s| < 1$, erindre vi, at

$$\Gamma'(1 + s) = \psi(1 + s)\Gamma(1 + s),$$

eller

$$a_1 + 2a_2 s + 3a_3 s^2 + \dots = (-S_1 + S_2 s - S_3 s^2 + \dots)$$
$$(1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots),$$

hvoraf ved Sammenligning af Koefficienterne til s^n paa begge Sider af Lighedstegnets findes

$$(n+1)a_{n+1} = -S_1 a_n + S_2 a_{n-1} - \ldots + (-1)^{n+1} S_{n+1}, \quad (49')$$

som kan benyttes til den numeriske Beregning af Koefficienterne a_n. For $n = 1, 2, \ldots$ findes efterhaanden

$$a_1 = -S_1, \; a_2 = \tfrac{1}{2}(S_1^2 + S_2),$$

$$a_3 = -\tfrac{1}{6}(S_1^3 + 3S_1S_2 + 2S_3), \ldots,$$

som imidlertid ikke saa godt som (49′) egner sig for numerisk Beregning. Sættes i (49′) $(-1)^n a'_n$ for a_n, forsvinder de vexlende Fortegn, og man ser derfor, at naar $a'_1, a'_2, \ldots a'_n$ ere positive, maa a'_{n+1} ogsaa være det. Da $a'_1 = S_1$ er positiv, er saaledes alle a'_n positive, og derfor har a_n samme Fortegn som $(-1)^n$. Det er ogsaa let at beregne Koefficienterne i

$$P(1+s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \ldots \quad (50)$$

ved Udvikling af hvert Led i

$$P(1+s) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^\nu}{\nu!(\nu+1+s)}.$$

Man finder

$$b_0 = 1 - e^{-1}, \; b_n = \sum_{\nu=0}^\infty \frac{(-1)^{\nu+n}}{\nu!(\nu+1)^{n+1}}, \quad (50')$$

som giver en ret bekvem numerisk Beregning. Den uendelige Række for b_n bestaar af aftagende Led med vexlende Fortegn og b_n har derfor samme Fortegn som det første Led i Rækken eller som $(-1)^n$.

Da $Q(1+s) = \Gamma(1+s) - P(1+s)$, har man til Bestemmelse af Koefficienterne c_n i Udviklingen

$$Q(1+s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \ldots, \quad (51)$$

som skal konvergere for alle s,

$$c_0 = e^{-1}, \; c_n = a_n - b_n. \quad (51')$$

Da $c_1 = Q'(1)$, er hermed ogsaa $Q(0)$ bestemt, som vi have set i Slutningen af Afsnit (10).

Beregning af Koefficienterue i Udviklingen

$$\frac{1}{\Gamma(1+s)} = 1 + d_1 s + d_2 s^2 + \ldots, \quad (52)$$

som maa konvergere [illegible] ved Sammenligning af Koefficienterne

$$(1 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots)(1 + d_1 s + d_2 s^2 + \ldots) = 1,$$

hvarved findes

$$d_n + d_{n-1} a_1 + d_{n-2} a_2 + \ldots + a_n = 0, \qquad (52')$$

som med Anvendelse af omstaaende Udtryk for $a_1, a_2, a_3, \ldots$ giver

$$d_1 = S_1, \quad d_2 = \tfrac{1}{2}(S_1^2 - S_2), \quad d_3 = \tfrac{1}{6}(S_1^3 - 3S_1S_2 + 2S_3), \text{ o. s. v.}$$

Naar Koefficienterne $a_1, a_2, a_3, \ldots$ først ere beregnede, tjener (52')til den numeriske Beregning af $d_1, d_2, d_3, \ldots$

Foretrækker man derimod en uafhængig Beregning, kan man gaa frem paa følgende Maade. Man skal ifølge Taylor's Formel og (52) have

$$\frac{1}{\Gamma(1+s+t)} = \frac{1}{\Gamma(1+s) + t\Gamma'(1+s) + \ldots}$$
$$= 1 + d_1(s+t) + d_2(s+t)^2 + \ldots,$$

som ved Sammenligning af Koefficienterne til t paa begge Sider af det sidste Lighedstegn giver

$$-\frac{1}{\Gamma(1+s)} \cdot \frac{\Gamma'(1+s)}{\Gamma(1+s)} = -\frac{1}{\Gamma(1+s)} \cdot \psi(1+s)$$
$$= d_1 + 2d_2 s + 3d_3 s^2 + \ldots,$$

eller

$$(1 + d_1 s + d_2 s^2 + \ldots)(S_1 - S_2 s + S_3 s^2 - \ldots)$$
$$= d_1 + 2d_2 s + 3d_3 s^2 + \ldots,$$

hvoraf følger

$$(n+1)d_{n+1} = S_1 d_n - S_2 d_{n-1} + \ldots + (-1)^n S_{n+1}, \quad (52'')$$

der er af ganske samme Form som (49'), kun ere Fortegnene for $S_1, S_2, \ldots$ forandrede til det modsatte. Koefficienterne i Potensrækken for $\Gamma(1+s)$ ere først beregnede af Jeffery[25]. Koefficienterne i Udviklingerne af $1 : \Gamma(2+s) = 1 : ((s+1)\Gamma(1+s))$, $1 : \Gamma(s)$, $e^{Cs} : \Gamma(2+s)$, $\Gamma(2+s) = (s+1)\Gamma(1+s)$, $Q(s)$ og $e^{P(s)} : \Gamma(s)$ ere beregnede af Bourguet[18, 26], med 16 Decimaler, hvoraf vistnok den sidste er urigtig.

Opstillingen af de almindelige Rekursionsformler er i de citerede Arbejder gjennemført paa en noget vidtløftigere Maade end ovenfor.

14. Udvikling i Fakultetrækker. I det følgende

udvikle forskjellige af de i det foregaaende indførte Funktioner i Rækker af Formen

$$\Sigma \frac{c_\nu}{s(s+1)\ldots(s+\nu-1)}.$$

For Simpelheds Skyld indføre vi Betegnelsen

$$(s)_n = s(s+1)\ldots(s+n-1)$$

hvor n er et helt positivt Tal; medens vi for $n = 0$ sætte $(s)_0 = 1$. Endvidere fastsætte vi, at s ikke maa være noget helt negativt Tal eller Nul. Man ser da, at

$$\frac{(s')_\nu}{(s)_\nu} - \frac{(s')_{\nu+1}}{(s)_{\nu+1}} = \frac{(s')_\nu}{(s)_\nu}\left(1 - \frac{s'+\nu}{s+\nu}\right) = \frac{(s')_\nu}{(s)_{\nu+1}}(s-s'),$$

hvoraf udledes, idet vi antage $|s - s'| > 0$,

$$\frac{1}{s-s'}\left(1 - \frac{(s')_n}{(s)_n}\right) = \sum_0^{n-1} \frac{(s')_\nu}{(s)_{\nu+1}}. \qquad (\alpha)$$

Da man har

$$(s)_n = \frac{\Gamma(n+s)}{\Gamma(s)},$$

og altsaa

$$\frac{(s')_n}{(s)_n} = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s')} \cdot \frac{\Gamma(s'+n)}{(n-1)!\,n^{s'}} \cdot \frac{(n-1)!\,n^s}{\Gamma(s+n)} \cdot n^{s'-s},$$

ser man strax, at

$$\lim_{n=\infty} \frac{(s')_n}{(s)_n} = \begin{cases} 0 \\ \text{ubestemt} \\ \infty \end{cases}, \quad \text{for } \Re(s-s') \gtreqless 0. \ *)$$

Ifølge (α) vil man derfor have den for $\Re(s - s') > 0$ konvergente Udvikling

$$\frac{1}{s-s'} = \sum_0^\infty \frac{(s')_\nu}{(s)_{\nu+1}} = \frac{1}{s} + \frac{s'}{s(s+1)} + \frac{s'(s'+1)}{s(s+1)(s+2)} + \ldots \quad (\beta)$$

som er angivet af Stirling. For $\Re(s - s') = 0$ vil Rækken oscillere (mellem endelige Grænser), for $\Re(s - s') < 0$ divergere. Vi have i det foregaaende udelukket Tilfældet $s = s'$, i hvilket man umiddelbart ser, at Rækken, der reducerer sig til $\Sigma \frac{1}{s+\nu}$, er divergent.

Det fremgaar ikke af ove[illegible]ende, om Rækken er ligelig konverg[illegible] ted for alle Værdier af s og [illegible] [illegible]ndelig, $\Re(s - s') > \varepsilon$,

*) [illegible] af s.

$|s|, |s+1|, |s+2|, \ldots > \varrho$, hvor ε og ϱ ere vilkaarlig valgte, smaa positive Størrelser, skulle vi strax vise.

Vi antage disse Betingelser opfyldte og sætte $s = x + yi$, $s' = x' + y'i$. Man kan da vælge den positive Størrelse A saa stor, at $A > |s'|$, og derfor maa $x' > -A$, $|y'| < A$. Nu fastsætte vi et helt positivt Tal, som tilfredsstiller Uligheden

$$N > \frac{1}{\varepsilon}A^2 + A,$$

da er for $\nu \geqq N$

$$\nu + x' \leqq N + x' > A + x' > 0,$$

samt

$$|\nu + s'| - (\nu + x') < \frac{\varepsilon}{2},$$

thi

$$(\nu + x')\left(\sqrt{1 + \left(\frac{y'}{\nu + x'}\right)^2} - 1\right) < \frac{y'^2}{2(y + x')}$$

$$< \frac{A^2}{\frac{2}{\varepsilon}A^2 + 2A - 2A} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Heraf følger, idet

$$|\nu + s| > \nu + x > \nu + x' + \varepsilon,$$

$$|\nu + s| - |\nu + s'| > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nu sætte vi

$$u_n = \frac{(s')_n}{(s)_{n+1}}, \quad \left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| = \left|\frac{s + n + 1}{s' + n}\right|,$$

og ovenstaaende Ulighed kan da for $\nu = n + 1$ skrives

$$|s' + n| \cdot \left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| - |s' + n + 1| > \frac{\varepsilon}{2},$$

eller

$$|u_{n+1}| < \frac{2}{\varepsilon}(|s' + n| \cdot |u_n| - |s' + n + 1| \cdot |u_{n+1}|),$$

hvoraf

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots < \frac{2}{\varepsilon}|s' + n| \cdot |u_n| = \frac{2}{\varepsilon}\prod_0^n \left|\frac{s' + \nu}{s + \nu}\right|.$$

Heri er

$$\text{for } \nu < N, \quad \left|\frac{s' + \nu}{s + \nu}\right| < \frac{A + \nu}{\varrho}$$

og

$$\text{for } \nu \geqq N, \quad \left|\frac{s' + \nu}{s + \nu}\right| < \frac{|s' + \nu|}{|s' + \nu| + \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\nu + A}{\nu + A + \frac{\varepsilon}{2}},$$

og altsaa

$$\frac{2}{\varepsilon}\prod_{0}^{n}\left|\frac{s'+\nu}{s+\nu}\right| < \frac{2A(A+1)\ldots(A+N-1)}{\varepsilon\varrho^{N}\cdot\prod\limits_{0}^{n}\left(1+\frac{\varepsilon}{2(\nu+A)}\right)},$$

som er uafhængig af s og s' og konvergerer mod Nul med voxende n. Hermed er bevist, at Σu_n eller højre Side af (β) er ubetinget og ligelig konvergent, naar s, er endelig, $\Re(s-s')>\varepsilon$ og $|s|$, $|s+1|$, $|s+2|$, ... $>\varrho$, og tilmed vedbliver Rækken at være ligelig konvergent, naar hvert Led ombyttes med dets absolute Værdi.

Paa Grundlag heraf vilde det være let at bevise, at Konvergenskurven, saavel for den betingede som for den absolute Konvergens af en Række af Formen $\Sigma\frac{c_\nu}{(s)_\nu}$, var en ret Linie lodret paa Abcisseaxen, og det lader sig ogsaa gjøre at angive de nødvendige og tilstrækkelige Betingelser, en Funktion skal tilfredsstille for at kunne udvikles i en saadan Række. Da der imidlertid ikke vilde være nogen videre Anvendelse herfor i denne Afhandling, skal jeg indskrænke mig til denne Antydning.

Naar vi antage $|s|>|s'|$ og $\Re(s-s')>0$, kan (β) ogsaa skrives

$$\sum_{0}^{\infty}\frac{s'^{\nu}}{s^{\nu+1}} = \sum_{0}^{\infty}\frac{(s')_\nu}{(s)_{\nu+1}}. \qquad (\beta')$$

Da Rækken paa højre Side af Lighedstegnet er ligelig konvergent, ere vi berettigede til at udvikle efter Potenser af s og sammenligne med venstre Side. Sætte vi

$$(s')_n = C_0^n s'^n + C_1^n s'^{n-1} + \ldots + C_{n-1}^n s', \quad C_0^n = 1,$$

hvor de første Koefficienter C_ν^n let beregnes, finde vi

$$\frac{1}{s^{\nu+1}} = \sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{C_\mu^{\mu+\nu}}{(s)_{\mu+\nu+1}}, \qquad (\gamma)$$

som skal konverge— f— lette virkelig

er Tilfældet, s —1, hvor-

for

$$\left|\frac{C_{\mu}^{\mu+\nu}}{(s)_{\mu+\nu+1}}\right| < \frac{1}{|s|}\frac{(1)_{\mu+\nu-1}}{|(s+1)_{\mu+\nu}|},$$

som er det almindelige Led i en konvergent Række, naar $\Re(s+1-1) = \Re(s) > 0$.

Haves en for $|s| > r$ (ubetinget) konvergent Række

$$f(s) = \sum_{0}^{\infty} \frac{a_\nu}{s^{\nu+1}},$$

kan denne ved Hjælp af (γ) transformeres til en Fakultetrække. Man faar derved for $\Re(s) > r$ en ubetinget konvergent Dobbeltrække, som ved Sammendragning af Koefficienterne bliver (Stirling)

$$f(s) = \frac{a_0}{(s)_1} + \frac{a_1}{(s)_2} + \frac{a_2 + a_1}{(s)_3} + \frac{a_3 + 3a_2 + 2a_1}{(s)_4} + \ldots, \tag{δ}$$

hvori det almindelige Led er

$$\frac{A_\nu}{(s)_{\nu+1}} = \frac{a_\nu + C_1^\nu a_{\nu-1} + C_2^\nu a_{\nu-2} + \ldots + C_{\nu-1}^\nu a_1}{(s)_{\nu+1}}, \tag{ε}$$

eller symbolsk

$$\frac{a(a+1)\ldots(a+\nu-1)}{(s)_{\nu+1}},$$

som ogsaa direkte kunne udledes af (β') ved symbolsk Regning. Et direkte Bevis for, at (δ) er ubetinget konvergent for $\Re(s) > r+\varepsilon$, faas ved at bemærke, at man ifølge bekendte Sætninger om Potensrækker skal have $a_\nu < A(r+\varepsilon)^\nu$, hvor ε er en vilkaarlig lille Størrelse, og A er endelig. Man har da

$$\left|\frac{a_\nu}{(s')_{\nu+1}}\right| < |A| \cdot \frac{(r+\varepsilon)_\nu}{|(s)_{\nu+1}|} \text{ . o. s. v.}$$

Af Identiteten

$$\frac{1}{(s+\nu)_m} - \frac{1}{(s+\nu+1)_m} = \frac{m}{(s+\nu)_{m+1}}$$

følger

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{(s+\nu)_{m+1}} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{(s)_m} - \frac{1}{(s+n)_m}\right), \tag{ξ}$$

hvoraf for $m \geqq 1$ og n voxende i det uendelige udledes (Stirling)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(s+\nu)_{m+1}} = \frac{1}{m}\frac{1}{(s)_m}. \tag{η}$$

At denne Række ogsaa er ubetinget konvergent, beviser man let.

Anvendes Transformationen (ξ) paa Rækken (δ), findes, idet vi sætte $a_0 = 0$,

$$f(s)+f(s+1),\ldots+f(s+n-1)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A_\nu}{\nu}\left(\frac{1}{(s)_\nu}-\frac{1}{(s+n)_\nu}\right),$$

Nu har man imidlertid

$$\frac{A_\nu}{\nu(s+n)_\nu}=\left(1+\frac{s}{\nu}\right)\frac{s}{s+n}\,\frac{(s+1)_{\nu-1}}{(s+n+1)_{\nu-1}}\,\frac{A_\nu}{(s)_{\nu+1}}$$

og idet $\Re(s) > r$ og s antages endelig

$$\frac{|s+\mu|}{|s+n+\mu|}<1,\qquad \frac{|(s+1)_{\nu-1}|}{|(s+n+1)_{\nu-1}|}<1,$$

$$\left|\frac{A_\nu}{\nu(s+n)_\nu}\right|<\left|1+\frac{s}{\nu}\right|\,\frac{|s|}{|s+n|}\,\left|\frac{A_\nu}{(s)_{\nu+1}}\right|.$$

Da $\Sigma\left|\frac{A_\nu}{(s)_{\nu+1}}\right|$ er konvergent, $\left|1+\frac{s}{\nu}\right|$ er endelig og

$\lim\limits_{n=\infty}\frac{|s|}{|s+n|}=0$, findes derfor

$$\lim_{n=\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A_\nu}{\nu(s)_\nu}=0,$$

eller

$$f(s)+f(s+1)+f(s+2)+\ldots=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A_\nu}{\nu(s)_\nu},\qquad (\upsilon)$$

som ligeledes skyldes Stirling.

Disse Formler kunne finde umiddelbar Anvendelse til Beregning af $\omega(s)$. Det vil erindres, at man har

$$\omega(s)=\sum_0^{\infty}\left(\left(s+\nu+\tfrac{1}{2}\right)l\left(1+\frac{1}{s+\nu}\right)-1\right),$$

og for $|s|>1$

$$\left(s+\frac{1}{2}\right)l\left(1+\frac{1}{s}\right)-1=\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}\nu}{2(\nu+1)(\nu+2)s^{\nu+1}},$$

og altsaa ifølge (δ) og (ε)

$$\left(s+\frac{1}{2}\right)l\left(1+\frac{1}{s}\right)-1=\sum_1^{\infty}\frac{k_\nu}{(s)_{\nu+1}},$$

$$k_\nu=\frac{(-1)^{\nu+1}}{2(\nu+1)(\nu+2)}+\frac{(-1)^\nu(\nu-1)}{2\nu(\nu+1)}C_1^\nu+\ldots+\frac{1}{12}C^\nu_{\nu-1},$$

hvoraf ved (ϑ)

$$\omega(s) = \sum_{1}^{\infty} \frac{k_\nu}{\nu (s)_\nu}, \tag{53}$$

som er ubetinget konvergent for $\Re(s) > 1$, og som skyldes Binet[13]). Man ser da strax, at $|k_\nu| < \frac{1}{12}(1)_\nu = \frac{\nu!}{12}$.

De første Koefficienter ere $k_1 = \frac{1}{12}$, $k_3 = 0$, $k_3 = -\frac{1}{120}$, $k_4 = -\frac{1}{30}$, ... Tager man s stor, giver (53) en stor Nøjagtighed ved Beregning af kun faa Led.

Paa samme Maade udledes af

$$\left(s + \frac{1}{2}\right) l \left(1 + \frac{1}{s}\right) - 1 = \sum_{1}^{\infty} \frac{\nu}{2(\nu+1)(\nu+2)(s+1)^{\nu+1}},$$

$$|s + 1| > 1,$$

$$\left(s + \frac{1}{2}\right) l \left(s + \frac{1}{s}\right) - 1 = \sum_{1}^{\infty} \frac{k_\nu}{(s+1)_{\nu+1}},$$

$$k_\nu = \frac{\nu}{2(\nu+1)(\nu+2)} + \frac{\nu - 1}{2\nu(\nu+1)} C_1^\nu + \ldots + \frac{1}{12} C_{\nu-1}^\nu,$$

og

$$\omega(s) = \sum_{1}^{\infty} \frac{k_\nu}{\nu (s+1)_\nu}, \tag{54}$$

som er ubetinget konvergent for $\Re(s) > 0$. De første Koefficienter ere $k_1 = \frac{1}{12}$, $k_2 = \frac{1}{6}$, $k_3 = \frac{59}{120}$, $k_4 = \frac{24}{15}$, ... (54) skyldes ligeledes Binet.

---

17) Prym. Zur Theorie der Gammafunction. Crelle(s Journal, B. 82.

18) Bourguet. Développement en séries des intégrales Eulériennes. Annales de l'École Normale, 2e série, t. 10, 1881.

19) Lindhagen. Studier öfver Gammafunktionen. Upsale 1887.

20) Mellin. Zur Theorie der Gammafunction. Acta Mathematica, t. VIII. 1886.

Über einen Zusammenhang zwischen gewissen linearen Differential- und Differenzengieichungen. ib. t. IX. 1887.

21) Bourguet. Comptes rendus, 1883, April 30. Acta Mathematica, t. II.

22) Bourguet. Comptes rendus, 1883, Maj 21.

23) Legendre. Traité des fonøtions allitiques et des intégrales Eulériennes, t. II, p. 432.

24) Stieltjes. Table des valeurs des sommes $S_k = \sum_{1}^{\infty} n^{-k}$. Acta Mathematica, t. X. 1887.

25) Jefferey. On ȷhe derivatives of the gammafunction. The quarterly journal of pure and applied mathematics, v. 6.

26) Bourguet. Sur les intégrales Eulériennes et quelques autres fonctions uniformes. Acta Mathematica, t. II, 1883.

Om Primtal af bestemte Former.

(Af A. S. Bang.)

1. Tchebychef har, som bekjendt, angivet en højere og en lavere Grænse for Summen af Logarithmerne af Primtallene, mindre end n. En noget ændret Fremstilling af denne Undersøgelse finder man i en Afhandling »Om Primtal« af Prof. Jul. Petersen i Tidsskr. for Math. 4. R. 6. Aarg. (1882). Af disse Undersøgelser følger der, idet man benytter de sædvanlige Logarithmer, at man for n tilstrækkelig stor, (hvilket stedse forudsættes i det Efterfølgende), har

$$0{,}481n > \Sigma_1^n \log p > 0{,}399n, \ldots (1)$$

hvor Summen udstrækkes til alle Primtal, mindre end eller lig n. Idet M_n er mindste fælles Multiplum for Tallene 1, 2, 3 ... n, faar man tillige:

$$0{,}481n > \log M_n > 0{,}399n \ldots (2).$$

Ved at gaa ud fra disse Uligheder, kan man finde nogle Grænser for Summen af Logarithmerne af Primtal af bestemte Former, men forinden vi gaa over til denne Undersøgelse, skulle vi først udlede en Hjælpesætning, som vil blive benyttet senere.

2. Lad

$$a_1, a_2, a_3 \ldots a_n \ldots (3)$$

være en Differensrække med Differensen d og første Led primisk med d, samt p et Primtal, som ikke gaar op i d.

Er da p^α den højeste Potens af p, som gaar op i Produktet

$$a_1 . a_2 . a_3 \ldots a_n,$$

og p^β den højeste Potens af p, som gaar op i [n], da har man

$$a_n p^\beta > p^\alpha > p^\beta.$$

For at bevise denne Sætning, sammenlignes Rækken (3) med Rækken

$$1, 2, 3, \ldots n \ldots (4).$$

Lad det første Multiplum af p i den første Række være a_m, da indeholder den

$$u_1 = \left(\frac{n + p - m}{p}\right)$$

Multipla af p, og da

$$\left(\frac{n}{p}\right) + 1 \geqq u_1 \geqq \left(\frac{n}{p}\right),$$

faar man, idet der er v_1 Multipla i Rækken (4),

$$v_1 + 1 \geqq u_1 \geqq v_1.$$

Antage vi, at $u_2, u_3 \ldots$ ere Antallene af Multipla af p^2, $p^3 \ldots$ i (3), og $v_2, v_3 \ldots$ de tilsvarende Antal for (4), faar man:

$$v_2 + 1 \geqq u_2 \geqq v_2$$
$$v_3 + 1 \geqq u_3 \geqq v_3$$
$$\vdots$$
$$v_s + 1 \geqq u_s \geqq v_s$$
$$1 = u_{s+1}$$
$$\vdots$$
$$1 = u_r.$$

(Vi forudsætte her, at $r > s$, men $r = s$ fører til samme Resultat). Nu er imidlertid

$$\alpha = u_1 + u_2 + \ldots u_r$$
$$\beta = v_1 + v_2 + \ldots v_r,$$

saa at man faar:

$$\beta + r > \alpha > \beta,$$

eller

$$p^\beta . p^r \geqq p^\alpha \geqq p^\beta, \qquad (5)$$

hvoraf man, da et af Leddene i (3) er deleligt med p^r, og man altsaa har

$$a_n \geqq p^r,$$

faar

$$a_n . p^\beta \geqq p^\alpha \geqq p^\beta,$$

hvilket skulde bevises.

3. Idet man af Produktet $a_1 a_2 \ldots a_n$ borttager alle Primfaktorer, som ere større end n, bliver der et Produkt

$$P = \Pi_1^n p^\alpha$$

tilbage, som indeholder alle Primtal p, mindre end og primiske med d.

Ved Benyttelse af (5), faar man

$$\Pi_1^n p^{\beta} \cdot \Pi_1^n p^r \geqq P \geqq \Pi_1^n p^{\beta}.$$

Indeholder d Primfaktorerne $p_1, p_2 \ldots$,

da er
$$\Pi_1^n p^{\beta} = \frac{[n]}{p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \ldots};$$

var nemlig Produktet udstrakt til alle Primtal, mindre end n, blev det lig [n], saa man nu maa dividere med de samme Potenser af $p_1, p_2 \ldots$, hvori de findes i [n].

Da $nd > a_n$, faar man $nd > p^r$, saa at, naar

$$p^{m+1} > n \geqq p^m,$$
$$p^{m+1} d > p^r,$$

altsaa
$$d > p^{r-m-1}.$$

Nu er $r \geqq m$, saa at $r - m \geqq 0$.

Vi antage først $r - m \geqq 2$; i dette Tilfælde faar man

$$d \geqq p.$$

Er $p > d$, maa man altsaa have $r - m = 1$ eller $= 0$.

Af $r - m = 1$ følger, da $n > p$, $m > 1$, saa at

$$nd \geqq p^2,$$
$$\sqrt{nd} \geqq p.$$

Vi faa saaledes, at

$$\Pi_1^n p^r : \Pi_1^n p^m = \Pi_1^n p^{r-m}$$

kan indeholde Primfaktorer, beliggende mellem d og $\sqrt{nd}$, i første Potens, og Primfaktorer mindre end d i højere Potenser, og kan da sætte

$$\Pi_1^m p^r \leqq \Pi_1^n p^m \cdot \Pi_d^{\sqrt{nd}} p \cdot \Pi_1^d p^s.$$

Det sidste Produkt er mindre end

$$\Pi_1^d d \cdot p = d^{\alpha} \cdot \Pi_1^d p,$$

hvor α er Antallet af Primtal mindre end og primiske med d, saa man faar:

$$\Pi_1^n p^r < M_n \cdot \Pi_1^{\sqrt{nd}} p \cdot d^{\alpha}.$$

Altsaa har man

$$\frac{[n]}{p_1^{\beta_1} \cdot p_1 \ldots} M \ldots [illegible] \qquad \frac{[n]}{\ldots^{\beta_2}}, \qquad (6)$$

hvor $\beta_1 = \left(\frac{n}{p_1}\right)$ ..

4. Vi skulle nu søge at bestemme Grænser (særligt lavere Grænser) for Summen af Logarithmerne af Primtal af bestemte Former, og betragte først Primtal af Formerne $4x + 1$ og $4x + 3$.

Danner man Produktet A af Leddene i Differensrækken

$$1, 5, 9 \ldots 4n - 3, \qquad (7)$$

kan man først bestemme, hvilke Primfaktorer større end n, A kommer til at indeholde.

Et Primtal $4x + 1$ beliggende mellem n og 4n er selv et af Leddene i (7), men er ikke Faktor i noget andet af disse. Var nemlig $h(4x + 1)$ et af disse, maatte man have $h \equiv 1 \pmod 4$, da hvert Led i (7) er $\equiv 1 \pmod 4$, saa at, da h er ulige, $h > 5$, hvilket, som Følge af $3x + 1 > n$, vilde give $h(4x + 1) > 5$, men dette er umuligt, da alle Tallene i (7) ere mindre end 4n.

Var Primtallet $4x + 3$ Faktor i et af Leddene i (7), maatte dette være $h(4x + 3)$, hvor $h \equiv 3 \pmod 4$ og ulige, altsaa h lig et af Tallene $3, 7, \ldots$; da $h \geqq 7$ giver $(4x + 3)h \geqq 7n$, hvad der er umuligt, kan man kun have $h = 3$, og Primtallet $4x + 3$ findes altsaa i første Potens i Produktet A, saafremt

$$3(4x + 3) < 4n \text{ eller } 4x + 3 < \frac{4n}{3}.$$

Tænker man sig alle Primfaktorer, større end n, borttagne af Produktet A, og det Produkt, som bliver tilbage, kaldes P, har man altsaa

$$A = P \,.\, \Pi_n^{4n} p_1 \,.\, \Pi_n^{\frac{4n}{3}} p_3,$$

hvor p_1 og p_3 ere Primtal, henholdsvis af Formen $4x + 1$ og $4x + 3$. Ifølge (6) har man, da 4 kun indeholder Primfaktorer 2,

$$P \geqq \frac{[n]}{2^{\beta}},$$

hvor $\beta = \left(\frac{n}{2}\right) + \left(\frac{n}{4}\right) + \ldots < n_1$ saa at

$$2^n \,.\, P > [n].$$

En højere Grænse for A er

$$4 \,.\, 8 \,.\, 12 \,..\, 4n = 4^n \,.\, [n],$$

saa at $$4^n \,.\, 2^n\, [n] > [n] \,.\, \Pi_n^{4n} p_1 \,.\, \Pi_n^{\frac{4n}{3}} p_3,$$

altsaa $$8^n > \Pi_n^{4n} p_1 \,.\, \Pi_n^{\frac{4n}{3}} p_3,$$

eller ved at tage Logarithmen

$$0{,}9031\, n > \Sigma_n^{4n} \log p_1 + \Sigma_n^{\frac{4n}{3}} \log p_3.$$

Ifølge (1) er

$$0{,}481\, n > \Sigma_1^n \log p_1 + \Sigma_1^n \log p_3,$$

(egentlig skulde der til højre Side tilføjes $+ \log 2$, men dette Led er forsvindende, da n er et stort Tal), altsaa:

$$1{,}385\, n > \Sigma_1^{4n} \log p_1 + \Sigma_1^{\frac{4n}{3}} \log p_3,$$

hvoraf $$\Sigma_{\frac{4n}{3}}^{4n} \log p_3 \div 1{,}385\, n > \Sigma_1^{4n} \log p > 4 \,.\, 0{,}399\, n,$$

$$\Sigma_{\frac{4n}{3}}^{4n} \log p_3 > 0{,}211\, n$$

$$\Sigma_{\frac{n}{3}}^{n} \log p_3 > 0{,}052\, n.$$

Da n er forudsat stor, har man

$$\Sigma_1^n \log p_3 > \Sigma_{\frac{n}{3}}^{n} \log p_3 + \Sigma_{\frac{n}{9}}^{\frac{n}{3}} \log p_3 + \Sigma_{\frac{m}{27}}^{\frac{n}{9}} \log p_3$$

$$> 0{,}052n + 0{,}017n + 0{,}005n,$$

hvoraf $$\Sigma_1^n \log p_3 > 0{,}074n.$$

Ved at gaa ud fra Produktet

$$3 \cdot 5 \cdot 9 \ldots (4n - 1),$$

vilde det samme Ræsonnement give:

$$\Sigma_1^n \log p_1 > 0{,}074\, n.$$

Disse lavere Grænser, som kun ere strængt beviste under Forudsætning af, at n er større end en vis Grænse, ere vel meget smaa, men ved Hjælp af dem kan man dog slutte, at der findes uendelig mange Primtal, saavel af Formen $4x + 1$ som af Formen $4x + 3$.

For n uendelig stor, blive nemlig de lavere Grænser uendelig store.

5. Idet p_1 og p_5 betegne Primtal af Formen $6x + 1$ og $6x + 5$, og

faar man, som i 4,

$$A = P \,.\, \Pi_n^{6n} p_1 \,.\, \Pi_n^{\frac{6n}{5}} p_5,$$

hvor
$$P \geqq \frac{[n]}{2^\beta \,.\, 3^\gamma};$$

men $\beta < n$, $\gamma < \frac{n}{2}$, altsaa

$$2^n \,.\, 3^{\frac{n}{2}} \,.\, P > [n].$$

En højere Grænse for A er

$$6 \,.\, 12 \ldots 6n = 6^n [n],$$

saa at
$$6^n \,.\, 2^n \,.\, 3^{\frac{n}{2}} > \Pi_n^{6n} p_1 \,.\, \Pi_n^{\frac{6n}{5}} p_5,$$

eller ved at tage Logarithmen

$$1{,}318\,n > \Sigma_n^{6n} \log p_1 + \Sigma_n^{\frac{6n}{5}} \log p_5,$$

hvoraf
$$1{,}799\,n > \Sigma_1^{6n} \log p_1 + \Sigma_1^{\frac{6n}{5}} \log p_5,$$

og
$$\Sigma_{\frac{6n}{5}}^{6n} \log p_5 > \Sigma_1^{6n} \log p - 1{,}799\,n > 0{,}595\,n$$

$$\Sigma_{\frac{n}{5}}^{n} \log p_5 > 0{,}099\,n.$$

Heraf faar man

$$\Sigma_1^n \log p_5 > 0{,}099\,n + 0{,}019\,n + 0{,}003\,n,$$

altsaa
$$\Sigma_1^n \log p_5 > 0{,}121\,n,$$

og analogt
$$\Sigma_1^n \log p_1 > 0{,}121\,n.$$

Da $n = \infty$ gjør begge de lavere Grænser ∞, faar man, at der findes uendelig mange Primtal af hver af Formerne $6x + 1$ og $6x + 5$.

6. Lad p_1, p_5, p_7, p_{11}, p_{13} og p_{17} betegne Primtal af Formerne $18x + 1$, $18x + 5 \ldots 18x + 17$.

Man faar da, idet

$$A = 1 \,.\, 19 \,.\, 37 \ldots (18n - 17),$$

$$A = P \,.\, \Pi_n^{18n} p_1 \,.\, \Pi_n^{\frac{18n}{11}} p_5 \,.\, \Pi_n^{\frac{18n}{13}} p_1 \,.\, \Pi_n^{\frac{18n}{5}} p_{11} \,.\, \Pi_n^{\frac{18n}{7}} p_{13} \,.\, \Pi_n^{\frac{18n}{17}} p_{17},$$

og, ifølge (6),

$$\frac{[n]}{2^\beta \,.\, 3^\gamma} \, Mn \,.\, \Pi_1^{\sqrt{18n}} p \,.\, 18^5 > P > \frac{[n]}{2^\beta \,.\, 3^\gamma},$$

hvor $\beta = \left(\frac{n}{2}\right) + \left(\frac{n}{4}\right) + \ldots, \gamma = \left(\frac{n}{3}\right) + \left(\frac{n}{9}\right) + \ldots,$
saa at, da n er et stort Tal

$$n > \beta > \frac{31}{32} n \text{ og } \frac{n}{2} > \gamma > \frac{13}{27} n.$$

Man faar endvidere

$$18^n [n] > A > 18^{n-1} [n-1],$$

saa at
$$18^n . 2^n . 3^{\frac{n}{2}} > \frac{A}{P} > \frac{18^n . 2^{\frac{31}{32}n} . 3^{\frac{13}{27}n}}{n . 18^6 . M_n . \Pi_1^{\sqrt{18n}} p},$$

altsaa ved at tage Logarithmen, og erindre at

$$\log M_n < 0{,}481 n \text{ og } \Sigma_1^{\sqrt{18n}} \log p < 0{,}481 \sqrt{18n},$$

$$1{,}795 n > \log \frac{A}{P} > 1{,}295 n - 0{,}481 \sqrt{18n} - \log 18^6 n.$$

Man kan nu tage n saa stor, at

$$0{,}001 n > 0{,}481 \sqrt{18n} + \log 18^6 n,$$

og faar da

$$1{,}795 n > \Sigma_n^{18n} \log p_1 + \Sigma_n^{\frac{18n}{11}} \log p_5 + \ldots \Sigma_n^{\frac{18n}{17}} \log p_{17} > 1{,}294 n.$$

Naar hertil adderes Uligheden

$$0{,}481 n > \Sigma_1^n \log p_1 + \ldots \Sigma_1^n \log p_{17} > 0{,}399 n,$$

og man i Stedet for n sætter $\frac{n}{18}$, faar man endelig

$$0{,}127 n > \Sigma_1^n \log p_1 + \Sigma_1^{\frac{n}{11}} \log p_5 + \Sigma_1^{\frac{n}{13}} \log p_7$$
$$+ \Sigma_1^{\frac{n}{5}} \log p_{11} + \Sigma_1^{\frac{n}{7}} \log p_{13} + \Sigma_1^{\frac{n}{17}} \log p_{17} > 0{,}094 n. \quad (8)$$

Ved at gaa ud fra Produktet

$$5 . 23 . 41 \ldots (18n - 13),$$

vilde man, stadigt under den Forudsætning, at n er tilstrækkelig stor, faa

$$0{,}127 n > \Sigma_1^{\frac{n}{5}} \log p_1 + \Sigma_1^n \log p_5 + \ldots \Sigma_1^{\frac{n}{13}} \log p_{17}$$

saa at man, saa meget mere, faar

$$0{,}127 n > \Sigma_1^n \log p_5,$$

og analogt indses det, at

$$0{,}127 n > \Sigma_1^n \log p_7 \text{ osv.}$$

Som Følge heraf er

$$\frac{1}{11} \cdot 0{,}127\,n > \Sigma_1^{\frac{n}{11}} \log p_5 \text{ osv.},$$

saa at (8) giver

$$\Sigma_1^n \log p_1 + (\tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{17})\, 0{,}127\,n > 0{,}094\,n,$$

altsaa $\Sigma_1^n \log p_1 > 0{,}021\,n,$

og analogt faar man

$$\Sigma_1^n \log p_5 > 0{,}021\,n \text{ osv.}$$

Da de lavere Grænser blive ∞, naar $n = \infty$, faar mau, at der er uendelig mange Primtal af hver af Formerne $18x + 1$, $18x + 5$, $18x + 7$, $18x + 11$, $18x + 13$ og $18x + 17$.

7. Naar p_1, p_5, p_7, p_{11}, p_{13}, p_{17}, p_{19}, og p_{23} betegne Primtal af Formerne $24x + 1$, $24 + 5 \ldots 24 + 23$, faar man, som i 6, idet

$$M = \Pi_n^{24n} p_1 \; \Pi_n^{\frac{25n}{5}} p_5 \ldots \Pi_n^{\frac{24n}{23}} p_{23}$$

$$24^n \cdot 2^n \cdot 3^{\frac{n}{2}} > M > \frac{24^n \cdot 2^{\frac{31}{32}n} \cdot 3^{\frac{12}{27}n}}{n \cdot 24^8 \cdot M_n \cdot \Pi_1 \sqrt[24n]{p}},$$

og heraf, naar n er tilstrækkelig stor,

$$1{,}920\,n > \log M > 1{,}326\,n$$

altsaa

$$1{,}920\,n > \Sigma_n^{24n} \log p_1 + \Sigma_n^{\frac{24n}{5}} \log p_5 + \ldots \Sigma_n^{\frac{24n}{23}} \log p_{23} > 1{,}326\,n,$$

og ved hertil at addere

$$0{,}481\,n > \Sigma_1^n \log p > 0{,}399\,n,$$

samt rette n til $\frac{n}{24}$,

$$0{,}101\,n > \Sigma_1^n \log p_1 + \Sigma_1^{\frac{n}{5}} \log p_5 + \ldots \Sigma_n^{\frac{n}{23}} \log p_{23} > 0{,}071\,n.$$

Man har da

$$\frac{1}{5} \cdot 0{,}101\,n > \Sigma_1^{\frac{n}{5}} \log p_5,\quad \frac{1}{7} \cdot 0{,}101\,n > \Sigma_1^{\frac{n}{7}} \log p_1 \text{ osv},$$

saa at

$$\Sigma_1^n \log p_1 > 0{,}071\,n - 0{,}101\,n\,(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{17} + \tfrac{1}{19} + \tfrac{1}{23})$$

$$\Sigma_1^n \log p_1 > 0{,}071\,n - 0{,}068\,n$$

altsaa $\Sigma_1^n \log p_1 > 0{,}003\,n$

og analogt $\Sigma_1^n \log p_5 > 0{,}00$

Heraf følger, at der er uendelig mange Primtal af hver af Formerne: $24x+1, 24x+5, 24x+7 \dots 24x+23$.

8. Da et Primtal af Formen $8x+1$ er af en af Formerne $24x+1$, eller $24x+17$, og et Primtal af Formen $12x+1$ af en af Formerne $24x+1$ eller $24x+13$, faar man endvidere

$$\Sigma_1^n \log(8x+1) > 0{,}006n$$
$$\Sigma_1^n \log(12x+1) > 0{,}006n,$$

saa at der ogsaa findes uendelig mange Primtal af Formerne $8x+1, 8x+2 \dots 8x+7$ og $12x+1, 12x+5 \dots 12x+11$.

9. Betegne vi ved $p_1, p_5, p_{11} \dots p_{41}$ Primtal af Formerne $42x+1, 42x+5 \dots 42x+41$, faar man, idet

$$M = \Pi_n^{24n} p_1 \,.\, \Pi_n^{\frac{42n}{17}} p_5 \dots \Pi_n^{\frac{42n}{41}} p_{41},$$

og n tilstrækkelig stor

$$2{,}362n > \log M > 1{,}856n,$$

og ved hertil at addere $\Sigma_1^n \log p$, og derpaa rette n til $\frac{n}{48}$, faar man

$$0{,}0551n > \Sigma_1^n \log p_1 + \Sigma_1^{\frac{n}{17}} \log p_5 + \dots \Sigma_1^{\frac{n}{5}} \log p_{17} + \dots$$
$$\Sigma_1^{\frac{n}{25}} \log p_{37} + \Sigma_1^{\frac{n}{41}} \log p_{41} > 0{,}0448n;$$

man har altsaa

$$0{,}0551n > \Sigma_1^n \log p_1 + \Sigma_1^{\frac{n}{5}} \log p_{17}$$

og analogt $\quad 0{,}0551n > \Sigma_1^n \log p_{17} + \Sigma_1^{\frac{n}{5}} \log p_{37},$

saa at $\quad \frac{1}{5} \,.\, 0{,}0551n > \Sigma_1^{\frac{n}{5}} \log p_{17} + \Sigma_1^{\frac{n}{25}} \log p_{37},$

endvidere er $\quad \frac{1}{17} \,.\, 0{,}0551n < \Sigma_1^{\frac{n}{17}} \log p_5$ osv.,

saa at endelig

$$\Sigma_1^n \log p_1 + 0{,}0551\, n\left(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{11}+\tfrac{1}{13}+\tfrac{1}{17}+\tfrac{1}{19}+\tfrac{1}{23}+\tfrac{1}{29}+\tfrac{1}{31}+\tfrac{1}{37}+\tfrac{1}{41}\right)$$
$$> 0{,}0448n \;\; \Sigma_1^n \log p_1 > 0{,}009n$$

og analogt $\quad \Sigma_1^n \log p_5 > 0{,}009n$ osv.

følger tillige

$$\Sigma^n \log(14n+1) > 0{,}018\, n \text{ osv.},$$

ingen:

Der findes uendelig mange Primtal af hver af Formerne

$$14n + 1,\ 14n + 3 \ldots 14n + 13,$$
$$42n + 1,\ 42n + 5,\ 42n + 11 \ldots 42n + 41.$$

10. Ere $p_1 . p_7, p_{11} \ldots p_{59}$ Primtal af Formerne $60x + 1$, $60x + 7 \ldots 60x + 59$ faar man, naar

$$M = \Pi_1^{60n} p_1 . \Pi_1^{\frac{60n}{43}} p_7 \ldots \Pi_1^{\frac{60n}{43}} p_{59}$$

og n tilstrækkelig stor,

$$1{,}493n > \log M > 1{,}983n,$$

heraf følger

$$0{,}0496n > \Sigma_1^n \log p_1 + \Sigma_1^{\frac{n}{43}} \log p_1 + \ldots \Sigma_1^{\frac{n}{59}} \log p_{59} > 0{,}0397n,$$

saa at, som i 9,

$$\Sigma_1^n \log p_1 > 0{,}0397n - 0{,}0496n \left(\tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \ldots \tfrac{1}{59}\right)$$
$$> 0{,}0397n - 0{,}0333n$$

altsaa

$$\Sigma_1^n \log p_1 > 0{,}0064n$$
$$\Sigma_1^n \log p_7 > 0{,}0064n \text{ osv.}$$

Endvidere faar man heraf

$$\Sigma_1^n \log (30x + 1) > 0{,}0128n \text{ osv.}$$
$$\Sigma_1^n \log (20x + 1) > 0{,}0128n \text{ osv.}$$

samt

$$\Sigma_1^n \log (10x + 1) > 0{,}0256n \text{ osv.};$$

altsaa er der uendelig mange Primtal af hver af Formerne:

$10x + 1$, $10x + 3 \ldots 10x + 9$, $20x + 1$, $20x + 3 \ldots 20x + 19$, $30x + 1$, $30x + 7 \ldots 30x + 29$ og $60x + 1$, $60x + 7 \ldots 60x + 59$.

11. Vi have saaledes bevist Dirichlets Sætning:

Enhver Differensrække, hvis første Led er primisk med Differensen, indeholder uendelig mange Primtal, for alle Differensrækker med Differenserne:

4—6—8—10—12—14—18—20—24—30—42—60,

medens Sætningen i sin Almindelighed næppe lader sig bevise ad denne Vej; for $n = 16, 22 \ldots$ synes det f. Ex. vanskeligt, selv for nok saa store n, at faa lavere Grænser for $\Sigma_1^n \log p$.

Fordelen ved de her fremsatte Beviser er nærmest at Beviserne ere fuldstændigt analoge for Differensræk samme Differens.

Gammafunktionens Theori

i elementær Fremstilling. II. Fortsættelse.

Af J. L. W. V. Jensen.

---

14. Fortsættelse. Tages $s = n$ hel positiv i (53) og (54), har man de konvergente Rækker

$$l(n!) - (n + \tfrac{1}{2})\, ln + n - l\sqrt{2\pi}$$

$$= \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{120n(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots$$

$$= \frac{1}{12(n+1)} + \frac{1}{12(n+1)(n+2)} + \frac{59}{360(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$+ \frac{29}{60(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} + \dots$$

Erindre vi, at

$$\omega^*(s) = \sum_0^\infty \left(\frac{1}{s+\nu} - l\left(1 + \frac{1}{s+\nu}\right)\right),$$

og at for $|s| > 1$ ifølge (δ) og (ε)

$$\frac{1}{s} - l\left(1 + \frac{1}{s}\right) = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{\nu+1}}{(\nu+1)s^{\nu+1}} = \sum_1^\infty \frac{k_\nu}{(s)_{\nu+1}}.$$

hvor $k_\nu = \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu+1} + \frac{(-1)^\nu}{\nu} C_1^\nu + \dots + \frac{1}{2} C_{\nu-1}^\nu$,

haves ifølge (θ)
$$\omega^*(s) = \sum_1^\infty \frac{k_\nu}{\nu\,(s)_\nu}, \tag{55}$$

som skal være ubetinget konvergent for $\Re(s) > 1$, og hvori de første Koefficienter ere $k_1 = \frac{1}{2}$, $k_2 = \frac{1}{6}$, $k_3 = \frac{1}{4}$, $k_4 = \frac{19}{30}, \dots$

Benyttes derimod Udviklingen

$$\frac{1}{s} - l\left(1 + \frac{1}{s}\right) = \sum_1^\infty \frac{\nu}{(\nu+1)(s+1)^{\nu+1}} = \sum_1^\infty \frac{k_\nu}{(s+1)_{\nu+1}},$$

som er konvergent for $\Re(s) > 0$, findes

$$k_\nu = \frac{\nu}{\nu+1} + \frac{\nu-1}{\nu} C_1^\nu + \dots + \frac{1}{2} C_{\nu-1}^\nu,$$

og
$$\omega^*(s) = \sum_1^\infty \frac{k_\nu}{\nu\,(s+1)_\nu}, \tag{56}$$

som er ubetinget konvergent for $\Re(s) > 0$. De første Koefficienter [illegible] $= \frac{7}{6}$, $k_3 = \frac{15}{4}$, $k_4 = \frac{469}{30}, \dots$ Som speci- [illegible]6) mærkes de konvergente Rækker

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln - C$$

$$= -\frac{1}{2n} - \frac{1}{12n(n+1)} - \frac{1}{12n(n+1)(n+2)}$$

$$- \frac{19}{120n(n+1)(n+2)(n+3)} - \ldots$$

$$= -\frac{1}{2(n+1)} - \frac{7}{12(n+1)(n+2)} - \frac{5}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$- \frac{469}{120(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} - \ldots$$

Til Slutning ville vi gjøre en Anvendelse paa Funktionen $\psi(s)$. Man har ifølge (19''')

$$\psi(s) - \psi(s - s') = \sum_0^\infty \left(\frac{1}{s - s' + \nu} - \frac{1}{s + \nu} \right),$$

og da for $\Re(s - s') > 0$

$$\frac{1}{s - s'} - \frac{1}{s} = \sum_1^\infty \frac{(s')_\nu}{(s)_{\nu+1}},$$

er ifølge (θ) $\quad \psi(s) - \psi(s - s') = \sum_1^\infty \frac{(s')_\nu}{\nu (s)_\nu},$

hvoraf ved at ombytte s' med $-s'$

$$\psi(s + s') - \psi(s) = \frac{s'}{s} - \frac{s'(s'-1)}{2s(s+1)} + \frac{s'(s'-1)(s'-2)}{3s(s+1)(s+2)} - \ldots, \qquad (57)$$

som er ubetinget konvergent for $\Re(s + s') > 0$.

Tages s' hel positiv findes

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \ldots + \frac{1}{s+n-1} = \frac{n}{s} - \frac{n(n-1)}{2s(s+1)} + \ldots$$

Trykfejl.

S. 37, L.	12 f. n.	staar	$\Gamma(1 - s)$	læs $\Gamma(-s)$
S. 40, L.	2 f. n.	»	$\Sigma(u_{\nu+1} - u$	» $\Sigma(u_{\nu+1} - u_\nu)$
S. 47, L.	9 f. n.	»	$-s$	» $1 - s$
S. 61, L.	7 og 10 f. n.	»	$a\mu$	» a_μ
S. 64, L.	3 f. o.	»	$\frac{15}{2}$	» $-\frac{15}{2}$
S. 64, L.	6 f. n.	»	$\Gamma(1 + s) +$	» $\Gamma(1 + s) =$
S. 66, L.	6 f. n.	»	$e^{P(s)}$	» $e\,P(s)$
S. 68, L.	9 f. o.	»	$\leqq$	» $\geqq$
S. 68, L.	12 f. o.	»	$\frac{y'^2}{2(y + x')}$	» $\frac{y'^2}{2(\nu + x')}$
S. 69, L.	10 f. n.	»	$s'\nu$	» s'^ν

S. 69, L.	7 f. n.	»	s	»	s'
S. 70, L.	12 f. n.	»	$a_\nu > A(r+s)^\nu$	»	$\|a_\nu\| > A(r+\varepsilon)^\nu$
S. 70, L.	6 f. n.	»	(ξ)	»	(ζ)
S. 71, L.	1 f. o.	»	(ξ)	»	(ζ)
S. 71, L.	11 f. n.	»	$(s)_\nu$	»	$(s+n)_\nu$
S. 72, L.	5 f. o.	»	$k_3 = 0$	»	$k_2 = 0$
S. 72, L.	15 f. o.	»	$k_4 = \frac{24}{15}$	»	$k_4 = \frac{29}{15}$
S. 72, L.	15 f. n.	»	Upsale	»	Upsala
S. 72, L.	5 f. n.	»	fonötions alliptiques	»	fonctions elliptiques
S. 72, L.	4 f. n.	»	Jefferey	»	Jeffery.

Literatur.

C. Crone. Nogle Hovedsætninger af Funktionslæren og de algebraiske Ligningers Theori til Brug for Søofficerskolens ældste Klasse. Vor mathematiske Litteratur er i de sidste to Aar blevet forøget med to Lærebøger, der giver en elementær Udvikling af Differential og Integralregningens Begyndelsesgrunde, nemlig Dr. Crones ovennævnte Lærebog og Dr. Juels »Elementerne af Infinitesimalregningen«. Bøgerne forfølge imidlertid et noget forskjelligt Maal, idet Dr. Juels Bog uden Hensyn til bestemte Examensfordringer søger at give en let og praktisk Adgang til (ogsaa uden Hjælp af Lærer) at sætte sig ind i Hovedsætningerne af Infinitesimalregningen. Den er nærmest beregnet for saadanne, der uden at søge en strengere videnskabelig Bevisførelse, dog ønske at kjende og have Brug for Differential og Integralregningers Sætninger.

Dr. Crones Bog er derimod afpasset efter de specielle Fordringer paa Søofficerskolen. Heraf kommer det, at Dr. Crones Bog i Almindelighed ikke medtager saa mange Sætninger som Dr. Juels Bog, men i enkelte Retninger mere, saaledes Afsnittet om algebraiske Ligninger, ligesom at han tillige søger en mere exakt [illegible]lse, saaledes ved Bestemmelsen af $\frac{dlx}{dx}$.

Dr. Crones Bog udmærker sig ved en klar Stil og mange gode Exempler, specielt synes der at være lagt en Del Vægt paa virkeligt at anvende de udviklede Formler paa Talexempler. Undertiden synes mig dog, at Dr. Crone har været mindre heldig i sin Fremstilling, saaledes i Definitionen af Grænseværdi og uendelig lille størrelse.

Integralregningen er meget kortfattet behandlet, ikke engang delvis Integration er medtaget ligesom heller ikke Integration af rationale brudne Funktioner. Derimod er Rækkeudviklingen i en klar Fremstilling udførligt behandlet. Dette Afsnit indeholder foruden almindelige Konvergensbetingelser og Taylors og Maclaurins Rækker, tillige Anvendelsen af de fundne Sætninger om Rækkeudvikling paa alle elementære Funktioner.

Af Differentialregningens Anvendelser er medtaget, Anvendelsen paa at finde de sande Værdier af ubestemte Former, at finde Maxima og Minima og endelig, noget løsrevet fra Forbindelsen med det øvrige, Anvendelsen paa at finde Krumningsradius til plane Kurver. Integralregningen anvendes paa i simple Tilfælde at finde Arealer, Rumfang, Tyngdepunkter og Inertimomenter.

Til Slutning gives som ovenfor nævnt en kort Oversigt over nogle Hovedsætninger af de algebraiske Ligningers Theori. Dette Afsnit er overordentlig kortfattet og er formodentlig medtaget af Hensyn til Examensfordringer, men kan dog nok ved en kyndig Lærers Veiledning gøre en Del Nytte.

(H. Valentiner.)

Examensopgaver.

Afgangsprøven for Søofficersskolen.

I en Ellipse med Centrum O betegnes det ene Endepunkt af den store Axe ved A, det ene Endepunkt af den lille Axe B. P er et vilkaarligt Punkt paa Ellipsen, hvis Tangent

skjærer Tangenten i A i et Punkt Q. Find det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem BQ og OP's konjugerede Diameter, idet P gjennemløber Ellipsen.

Ellipsen har Ligningen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Tangenten i $P(x_1, y_1)$ vil da have Ligningen

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1,$$

Q faar Koordinaterne $\left(a, \frac{b^2}{y_1}(1 - \frac{x_1}{a})\right)$.

Ligningen for BQ bliver

$$x_1 \frac{x}{a} + \frac{y_1}{b}\left(x + \frac{a}{b}(y - b)\right) = x,$$

og for QP's konjugerede Diameter

$$x_1 \frac{x}{a} + \frac{y_1}{b} \cdot \frac{y}{b} = 0.$$

Af disse findes

$$y_1 = \frac{bx}{x - a}, \quad x_1 = -\frac{a^2 y}{b(x - a)},$$

og dermed det søgte geometriske Steds Ligning

$$y^2 = -\frac{2b^2}{a}\left(x - \frac{a}{2}\right).$$

2. Paa en Hyperboloide med Ligningen

$$x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1 \text{ er givet Punktet } \left(\frac{5}{4}, 0, \frac{9}{4}\right).$$

Find Ligningerne for de 2 retlinede Frembringere paa Fladen, som gaa gjennem Punktet, og bestem deres Vinkel og deres Afstande fra Begyndelsespunktet.

Ligningerne for to vilkaarlige Frembringere paa Fladen, en af hver Slags, ere

$$x + \frac{z}{3} = k\left(1 + \frac{y}{2}\right), \quad x + \frac{z}{3} = k_1\left(1 - \frac{y}{2}\right)$$

$$x - \frac{z}{3} = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{y}{2}\right), \quad x - \frac{z}{2} = \frac{1}{k_1}\left(1 + \frac{y}{2}\right).$$

Skulle disse gaa gjennem det givne Punkt kræves $k = k_1 = 2$. Vinklen mellem Linierne bestemmes ved

$$\cos u = \frac{170}{298}, \text{ hvoraf } u = 55^0\, 13'\, 13''.$$

Den søgte Afstand beregnet paa sædvanlig Maade bliver

$$d = \frac{\sqrt{150}}{4} = \frac{5}{4}\sqrt{6}.$$

3. Af et Paraboloidesegment, begrænset af Omdrejningsparaboloiden med Ligningen $x^2 + y^2 = 2pz$ og Planen med Ligningen $z = k$, bortskjæres en ret cirkulær Kegle med Grundflade i Segmentets begrænsende Cirkel og Toppunkt i Begyndelsespunktet. Find Rumfanget, Tyngdepnnktet og Inertimomentet med Hensyn til z-axen af det tilbageblevne Legeme, der forudsættes helt igjennem at have samme Tæthed.

$$\text{Rumf.} = 2\pi p \int_0^k zdz - \frac{\pi}{3} kpk = p\pi k^2 - \frac{2}{3}\pi pk^2 = \frac{\pi}{3} pk^2,$$

$$\text{Moment} = \int_0^k \pi\left(2pz - \frac{2p}{k} z^2\right) zdz = 2\pi p \left(\frac{k^3}{3} - \frac{k^4}{4k}\right) = \frac{\pi pk^3}{6}.$$

Heraf faar man Tyngdepunktets z-koordinat

$$z_1 = \frac{\frac{\pi pk^3}{6}}{\frac{\pi pk^2}{3}} = \frac{k}{2}$$

$$\text{Inertimoment} = \int_0^k \frac{1}{2}\left(\pi\, 4p^2 z^2 - \pi\, \frac{4p^2 z^4}{k^2}\right) dz$$

$$= 2\pi p^2 \int_0^k \left(z^2 - \frac{z^4}{k^2}\right) dz = 2\pi p^2 \left(\frac{k^3}{3} - \frac{k^3}{5}\right) = \frac{4\pi p^2 k^3}{15}.$$

4. Vis, at Betingelsen for, at Ligningen

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2\,Dyz + 2\,Exz + 2\,Fxy = 0$$

fremstiller 2 Planer, er

$$ABC + 2\,EFD - AD^2 - BF^2 - CF^2 = 0.$$

For hvilke Værdier af k vil Ligningen

$$(2k - 3)x^2 + (2 - k)\,y^2 - 4\,(2 - k)\,z^2 + 4\,(k - 1)\,yz$$
$$+ 2\,(3k - 5)\,xz + kxy = 0$$

fremstille to Planer?

Den bekendte Betingelse giver i dette Tilfælde

$$k^3 - 5k^2 + \frac{17}{2}k - 5 = 0.$$

Heri sættes $k = z + \frac{5}{3}$, hvorved man faar

$$z^3 + \frac{1}{6}z - \frac{5}{54} = 0.$$

Resolventen til denne Ligning er

$$v^2 - \frac{5}{54}v - \frac{1}{6^3 . 27} = 0.$$

hvoraf

$$v = \frac{5 \pm \sqrt{27}}{108} = \begin{cases} p^3 \\ p^3 \end{cases}$$

$$z = -\frac{1}{6} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} . 0{,}57735 . i = -\frac{1}{6} \pm \frac{1}{2}i \text{ og } z = \frac{1}{3},$$

$$k = \begin{cases} \frac{3 \pm i}{2} \\ 2 \end{cases}.$$

Partiel Examen ved polyteknisk Læreanstalt.

September 1891.

I.

1. Find x af Ligningen

$$(1 + \sqrt{1 - x^2})^n + (1 - \sqrt{1 - x^2})^n = 0,$$

hvor n er et positivt, helt Tal.

2. At integrere den totale Differentialligning

$$(yz + xyz + az + e^z)\,dx + (xz + xyz + az + e^z)\,dy$$
$$+ (xy + a + e^z)\,dz = 0,$$

hvor a er en konstant Størrelse.

Opløsning.

1.

$$(1 + \sqrt{1 - x^2})^n + (1 - \sqrt{1 - x^2})^n = 0$$

$$\left(\frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}}\right)^n = -1 = \cos(2p + 1)\pi + i \sin(2p + 1)\pi.$$

$$\sqrt{1 - x^2} = \qquad \sec \frac{2p + 1}{2n}\pi, \; p = 0, 1, 2 \ldots n - 1.$$

2) Man integrerer først

$$(yz + xyz + az + e^z)\,dx + (xy + a + e^z)\,dz = 0.$$

Denne kan integreres med en Faktor, som er Funktion af x alene, nemlig e^x. Naar denne tilføjes, og man integrerer, faar man $xyze^x + aze^x + e^{x+z} + Y = 0$,

hvor Y er en ubekjendt Funktion af y. Derefter bestemmes Y saaledes, at den sidste Ligning ogsaa tilfredsstiller

$$(xz + xyz + az + e^z)\,dy + (xy + a + e^z)\,dz = 0.$$

Betingelsen herfor er

$$\frac{dY}{dy} = xyze^x + aze^x + e^{x+z} = -Y, \quad Y = \frac{C}{e^y}.$$

Den primitive Ligning til den givne Differentialligning er da

$$e^{x+y}(xyz + az + e^z) = C.$$

II.

I et retvinklet plant Koordinatsystem er givet Kurven

$$y^2 = -\frac{4x^3}{a + 4x}, \tag{1}$$

hvor a er en konstant.

1) Bestem en saadan Kurve, at den givne bliver geometrisk Sted for Skæringspunkterne mellem den søgtes Tangenter og de derpaa vinkelrette Linier fra Begyndelsespunktet.

2) Find det Volumen, som fremkommer, naar Arealet mellem den givne Kurve og dens Asymptote drejes om Y-Axen.

Opløsning. 1) Tangentens Ligning er

$$Y - y = p(X - x).$$

Den paa Tangenten vinkelrette Linie gjennem Begyndelsespunktet har Ligningen

$$y = -\frac{1}{p}X.$$

Skæringspunktet mellem disse Linier har Koordinaterne

$$X = -\frac{p(y - px)}{1 + p^2}, \quad Y = \frac{y - px}{1 + p^2}.$$

Indsættelse i (1) giver

$$\left(\frac{y - px}{1 + p^2}\right)^2 = \frac{4\dfrac{p^3(y - px)^3}{(1 + p^2)^3}}{a - \dfrac{4p(y - px)}{1 + p^2}}.$$

Denne Ligning deler sig i to

$$\left(\frac{y - px}{1 + p^2}\right)^2 = 0 \ldots (2) \text{ og } y = px + \frac{a}{4p} \ldots (3).$$

(2) giver $y = Cx,$

som bestemmer et System af rette Linier gjennem Begyndelsespunktet.

(3) har til singulært Integral

$$y^2 = ax, \text{ (en Parabel)}$$

og til fuldstændigt Integral

$$y = cx + \frac{a}{4c} \text{ (Parablens Tangenter).}$$

2) Det søgte Volumen er

$$V = -\int_{-\frac{1}{4}a}^{0} 2\pi\, x\, dx \,.\, \sqrt{\frac{-4x^3}{a + 4x}} = 4\pi \int_{-\frac{1}{4}a}^{0} x^2 \sqrt{\frac{-x}{a + 4x}}\, dx.$$

Her substitueres

$$-x = z^2 (a + 4x),\ x = -\frac{az^2}{4z^2 + 1},\ dx = -\frac{2a\, zdz}{(4z^2 + 1)^2}.$$

$$V = 8a^3\pi \int_0^{\infty} \frac{z^6}{(4z^2 + 1)^4}\, dz.$$

Dernæst substitueres

$$2z = \operatorname{tg} \theta.$$

$$V = \frac{a^3\pi}{2^4} \,.\, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \theta\, d\theta = \frac{5a^3\pi^2}{2^9}.$$

III.

En homogen, cirkulær, uendelig tynd Skive med Masse M og Radius a kan uden Modstand bevæge sig i sit eget Plan, XY-Planet, (retvinklede Koordinater). Skiven er paavirket af et i XY-Planet liggende Kraftpar med Moment G (regnet positivt i Omløbsretningen fra den positiv X-Axe mod den positive Y-Axe). Ved Bevægelsens Begyndelse er Skivens Centrum i Koordinaternes Begyndelsespunkt og faar meddelt Hastigheden v_0 i Retning af Y-Axen.

Man skal finde

1) Skivens Bevægel[illegible]

2) det geom[illegible] faste XY-Plan for de instantane[illegible]

[illegible]kivens [illegible]rligt Øjeblik.

Opløsning. 1) Tyngdepunktets Koordinater kaldes ξ og η. Da er

$$\xi = 0, \ \eta = v_0 \ t.$$

Drejningen om Centrum bestemmes, naar man benytter de sædvanlige Betingelser, ved

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} \cdot \Sigma mr^2 = G,$$

$$\text{Vinkelhastigheden} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{2Gt}{Ma^2}.$$

2) En Linie gjennem Centret vinkelret paa Centrets Hastighed har Ligningen

$$y = v_0 \ t. \qquad (1)$$

Det af Cirklens Punkter, som har den mindste Ordinat, har Hastighedskomposanter

$$v_x = \frac{2Gt}{Ma}, \ v_y = v_0.$$

En Linie gjennem dette Punkt vinkelret paa dets Hastighed har Ligningen

$$y - v_0 \ t + a = -\frac{2Gt}{Ma \, v_0} \cdot x \qquad (2)$$

Det geometriske Sted for Skæringspunkterne mellem (1) og (2) faar Ligningen

$$xy = -\frac{Ma^2 \, v_0^2}{2G},$$

som fremstiller en ligesidet Hyperbel.

3) Skivens levende Kraft er

$$\frac{1}{2} Mv_0^2 + \frac{G^2 t^2}{Ma^2}.$$

Løste Opgaver.

---

7. Find det geometriske Sted for Skæringspunktet af paa hinanden vinkelrette Tangenter til en Cardoide. (Denne er Fodpunktskurve til en Cirkel, idet Polen ligger paa Periferien).

(C. Juel.)

Opløsning. Lad Grundcirklen være (c), Polen o og det diametralt modsatte Punkt o_1; o's projektion p paa Tangenten til et Punkt z af Cirklen ligger da paa Cardoiden. Lad endvidere o's projektion paa Cardoidetangenten i p være q; da vil $\angle$ qpo være lig $\angle$ pzo (en Egenskab, som er fælles for alle Fodpunktskurver, og som let bevises ved at betragte Grundkurven som Grænse for en Polygon). Man har altsaa dels

$$\angle qoo_1 = 3 \cdot \angle zoo_1$$

dels

$$\triangle o_1oz \sim \triangle zop \sim \triangle poq.$$

Hvis de til Punkterne z og z_1 svarende tangenter skulle staa vinkelret paa hinanden, maa derfor enten $\angle zoz_1 = 30^0$ eller $= 90^0$.

Lad os nu bestemme Punkterne ved deres komplexe Beliggenhedstal, idet o_1 svarer til 1 og o til O. Er det søgte Punkt ξ, har man, idet man lader Tallet være ensbenævnt med Punktet

$$\zeta = q + q_1 = z^3 + z_1^3.$$

Kaldes Retningsvinklen for Halveringslinjen mellem cz og cz_1 for φ, og $\angle zoz_1$ for 2α, er Retningsvinklerne for cz og cz_1 $\varphi - \alpha$ og $\varphi + \alpha$. Man har derfor

$$z = \tfrac{1}{2}(1 + 1_{\varphi} \cdot 1_{-\alpha}) \text{ og } z_1 = \tfrac{1}{2}(1 + 1_{\varphi} \cdot 1_{\alpha})$$

Dette indsat giver

$$\xi = \tfrac{1}{8}[2 + 3 \cdot 1_{\varphi} \cdot (1_{\alpha} + 1_{-\alpha}) + 3 \cdot 1_{2\varphi} \cdot (1_{2\alpha} + 1_{-2\alpha})$$
$$+ 1_{3\varphi} \cdot (1_{3\alpha} + 1_{-3})].$$

1⁰. Hvis $\alpha = \frac{\pi}{2}$, faas

$$\xi = \tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{4} \cdot 1_{2\varphi}$$

ɔ: en Cirkel med Radius $\frac{3}{4}$ og Centrum i $\frac{1}{4}$.

2⁰. Hvis $\alpha = \frac{\pi}{6}$, faas

$$\xi = \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot 1_{\varphi} + \frac{3}{8} \cdot 1_{2\varphi}$$

Denne Ligning viser, at naar man fra $-\frac{1}{8}$ afsætter $+\frac{3}{8}$, og med dette Punkt $(\frac{1}{4})$ som Centrum og $\frac{3}{8}$ som Radius slaar en Cirkel, saa faar man et Punkt ξ ved ud ad en Linje gjennem $-\frac{1}{8}$ at afsætte Stykket $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ fra Linjens andet Skæringspunkt med Cirklen. Den anden Del af Stedet er da en limax.

(P. Heegaard.)

Opgaver til Løsning.

20. Man skal omforme den uendelige Række $\sum_{n=0}^{\infty} x^{\frac{n}{2}}(m,n)$, hvori (m, n) betegner Udtrykket

$$\frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})\dots(1-x^{m-n+1})}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^n)},$$

og $x > 1$, til et uendeligt Produkt af simpel Form. For m hel og positiv er Rækken endelig og er af Gauss (»Summatio quarundam serierum singularium«) bleven omformet til det endelige Produkt $(1+x^{\frac{1}{2}})(1+x^{\frac{2}{2}})(1+x^{\frac{3}{2}})\dots(1+x^{\frac{m}{2}})$.

21. Man skal, naar (m,n) har den i foregaaende Opgave fastsatte Betydning, bevise Identiteten

$$(m+m',n)=\sum_{\nu=0}^{n}(m,\nu)(m',n-\nu)\,x^{(n-\nu)(m-\nu)}$$

hvori m og m' ere vilkaarlige Tal, og x ingen n^{te} Rod af Enheden.

(20 og 21 af J. L. W. V. Jensen.)

Nogle Fortegnsbemærkninger.

(Af C. Juel.)

Paa en lukket Kurvegren, kan man vælge en positiv Omløbsretning for Buer, saaledes at Buen regnet fra et Punkt til et andet faar et bestemt Fortegn. Den positive Retning T paa Tangenten ligger det da nærmest at vælge i Overensstemmelse dermed, d. v. s. saaledes at dens positive Retning falder sammen med det tilsvarende Bueelements Retning.

Fastholdes en og samme Omløbsretning for positive Buer ogsaa ved Overskriden af en Spids, maa det erindres, at Vinklen mellem de positive Retninger af to Tangenter, der hver paa sin Side nærme sig Spidsen, vil konvergere mod π.

Man kan nu ogsaa bestemme den positive Retning N paa Normalen, idet man vedtager at vælge den saaledes, at

$$(TN) = +\frac{\pi}{2}.$$

Den positive Omløbsretning for Vinkler er, efter at Koordinatsystemet er fastlagt, bestemt ved $(xy) = +\frac{\pi}{2}$.

Vi ville nu sè, hvorvidt nogle bekendte Formler i Analysen ere alméngyldige med disse Fortegnsvedtægter.

Man har alméngyldigt:

$$\cos(XT) = \frac{dx}{ds}, \quad \sin(XT) = \frac{dy}{ds}$$

$$\cos(XN) = -\frac{dy}{ds} \quad \sin(XN) = \frac{dx}{ds}.$$

2. Regnes Krumningsradien ϱ fra Kurvepunktet M til Krumningscentret K, faar ogsaa den et bestemt Fortegn.

Vi ville undersøge Formlen $\varrho = \frac{ds}{d\varphi}$.

For en vilkaarlig Bue maa Retningen for positive Buer gaa med eller mod Uhret.

I det sidste af disse Tilfælde vil Buen s voxe samtidig med Tangentens Vinkel φ med Xaxen altsaa $\frac{ds}{d\varphi}$ være positiv — men samtidig dermed viser Figuren, at ϱ er positiv.

I det andet Tilfælde, vil φ aftage, naar s voxer, og $\frac{ds}{d\varphi}$ er negativ — men Figuren viser, at ϱ her er negativ. (Det bemærkes, at det er tilstrækkeligt alene at betragte en Cirkel f. Ex. med Centrum i Begyndelsespunktet.

Heraf følger, at ogsaa Formlen

$$\varrho = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

dig med Hensyn til Fortegnet.

3. Vi ville nu undersøge Formlen

$$\frac{d\varrho}{d\sigma} = 1 \text{ (numerisk)},$$

idet σ er Buen paa Evoluten. Beviset bygger paa, at med Betegnelserne fra Sturms Cours d'Analyse Nr. 240 (9ième ed.)

$$\frac{d\varrho}{d\sigma} = \frac{\xi - x}{\varrho}\frac{d\xi}{d\sigma} + \frac{\eta - y}{\varrho}\frac{dy}{d\sigma}.$$

Er nu Retningen for positive Buer paa Evoluten i Overensstemmelse med den positive Retning paa Kurvens Normal, der jo er Tangent til Evoluten, har man

$$\cos(XN) = \frac{\xi - x}{\varrho} = \frac{d\xi}{d\sigma}$$

$$\sin(XN) = \frac{\eta - y}{\varrho} = \frac{d\eta}{d\sigma},$$

altsaa $$\frac{d\varrho}{d\sigma} = 1, \ \varrho = \sigma + C.$$

I modsat Fald er $\frac{d\varrho}{d\sigma} = -1$, altsaa $\varrho = -\sigma + C$.

Vi kunne nu i et Punkt af Kurven, hvis tilhørende Krumningscentrum ikke er noget singulært Punkt paa Evoluten, selv vælge den positive Retning for Buer paa Evoluten i Overensstemmelse med den positive Retning paa Normalen. Men ifølge en ovenstaaende Bemærkning vil denne Overensstemmelse høre op, naar man overskrider en Spids paa Evoluten, hvilket Punkt ikke svarer til noget særegent Punkt paa den givne Kurve (men i Almindelighed til Maximum eller Minimum af ϱ).

Naar derfor Krumningsradierne i to Punkter af en Kurve, hvis mellemliggende Bue ikke indeholder noget Vendepunkt, ere ϱ_1 og ϱ_2 vil vel $\varrho_2 - \varrho_1$ være den mellemliggende Bue paa Evoluten mellem de to Krumningscentre K_1 og K_2, men denne skal regnes først positiv fra K_1 til den nærmeste Spids, dernæst negativ til den næste Spids og saaledes videre til man naar K_2.

———×———